

基于希尔伯特-施密特范数和交叉格莱姆的模型降阶方法

付金宝¹, 仲崇亮^{1,2}, 丁亚林¹

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033; 2. 中国科学院研究生院, 北京 100049)

摘要: 为了克服基于交叉格莱姆矩阵的最小信息损失模型降阶方法的局限性——信息损失性能指标不满足非负性和范数意义导致其物理意义不直观, 利用 Hankel 奇异值以及交叉格莱姆的信息属性推导出希尔伯特-施密特范数与交叉格莱姆的关系, 进一步推理得出希尔伯特-施密特范数意义的信息损失性能指标, 并给出了基于希尔伯特-施密特范数和交叉格莱姆的模型降阶方法. 最后, 通过数值算例表明, 降阶效果大为改善, 截断误差更小, 验证了新的信息损失指标的合理性和有效性.

关键词: 模型降阶; 希尔伯特-施密特; 范数; 格莱姆; 信息损失

中图分类号: TP14

文献标识码: A

文章编号: 1002-0411(2010)-04-0402-06

Approach to Model Reduction Based on Hilbert-Schmidt Norm and Cross-Gramian

FU Jinbao¹, ZHONG Chongliang^{1,2}, DING Yalin¹

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;

2. Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: In order to overcome the limitation that the information loss performance index of the method for model reduction by minimizing information loss based on cross-Gramian matrix does not meet nonnegativity and any norm so that its physical meaning is not intuitive, the relationships between the Hilbert-Schmidt norm and the cross-Gramian are derived from the Hankel singular values of systems and the information property of the cross-Gramian. Via further theoretical reasoning, the information loss performance index based on Hilbert-Schmidt norm is obtained. Moreover, an approach to model reduction based on Hilbert-Schmidt norm and cross-Gramian is proposed. Finally, a numerical example is illustrated to verify that the performance of model reduction is greatly improved and the truncation error is smaller. Therefore, the rationality and the validity of the new performance index are proved.

Keywords: model reduction; Hilbert-Schmidt; norm; Gramian; information loss

1 引言 (Introduction)

大系统在现实世界中广泛存在, 如天气和超大规模集成 (VLSI) 电路. 如果系统维数相当大, 那就给系统的建模、仿真、分析、控制、设计和计算带来严峻挑战. 因此, 模型降阶是十分必要的.

模型降阶起源于 20 世纪 60 年代末, 它一直是控制与系统工程领域的重要课题之一. 早期模型降阶主要是保留系统主导极点, 如奇异摄动近似法、Pade 近似法等. 1976 年 Mullis 和 Roberts^[1] 首先提出了平衡的概念, 1981 年 Moore^[2] 从系统内平衡实现 (IBR) 的角度, 提出了具有里程碑意义的平衡截断方法. 尽管平衡截断能保持系统稳定性和存在误差限, 但是它不是范数意义上的最优化, 而范数类方法, 如最优 Hankel 范数近似法^[3], 就是寻求范数意义上的最优化. 平衡和范数的方法都属于

奇异值分解 (SVD) 的方法, SVD 的方法只适用中度复杂系统. 因此, 基于 Krylov 迭代的模型降阶方法应运而生, 它具有数值计算效率高、适合高阶系统的优点, 但是它只适用于线性系统, 这类方法在稳定性上是有局限的, 通常不能保证稳定性. SVD 方法和 Krylov 方法各有优缺点, 部分学者研究这两类方法的折中或者优良继承的方法, 即基于 SVD-Krylov 的方法^[4].

除此之外, 还有一类基于信息论的模型降阶方法, 如最小 KL 信息距离方法^[5]、最小信息损失 (MIL) 方法^[6]、改进的最小信息损失 (RMIL)^[7] 方法, 输出最小信息损失方法^[8] 和基于交叉格莱姆信息 (CGMIL) 方法^[9] 等. 最小 KL 信息距离方法是使原系统和降阶系统闭环输出的 KL 信息距离最小. MIL 方法也是按照最小 KL 信息距离的基本思想,

只是它考虑的并不是系统的输出, 而是系统的状态变量, 所以它能使原系统和降阶系统的状态信息损失达到最小. RMIL 方法通过对平衡法以及三种规范二阶模式的分析, 综合考虑能控性和能观性的信息损失. 输出最小信息损失法先对原系统输出矩阵进行“伪保熵增广”变换, 并对状态变量进行一次保熵变换, 得出在特定坐标下各状态分量与输出信息的关系, 然后截断对系统输出信息贡献小的状态分量, 以保证输出信息损失最小. CGMIL 方法, 兼顾系统原始能控性和能观性, 以交叉格莱姆信息损失最小为降阶优化指标. 信息类模型降阶方法具有含义清晰明了的优点, 在模型降阶领域有很好的应用前景.

信息类模型降阶方法也需要合理的信息损失指标, 最好是范数意义上的信息损失指标. 本文分析 CGMIL 的模型降阶方法的信息损失指标的局限性即不满足非负性. 如果信息损失为负数, 那么给人的感觉是降阶后系统的信息反而增加了, 尽管其真实含义并非如此, 但显然会给读者增加理解难度. 因此, 本文研究 Hilbert-Schmidt 范数意义上的交叉格莱姆信息损失指标, 并给出算法, 有着十分重要的意义.

2 CGMIL 模型降阶方法 (CGMIL model reduction approach)

本文考虑如下渐近稳定线性定常系统

$$\begin{cases} \delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$. 算子 δ 定义为: 对于离散系统而言, $\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$; 对于连续系统而言, $\delta \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$.

系统的降阶模型为

$$\begin{cases} \delta \mathbf{x}_r(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r u(t) \\ y_r(t) = \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{D}_r u(t) \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{x}_r(t) \in \mathbb{R}^r$, $r < n$, $y_r(t) \in \mathbb{R}$, \mathbf{A}_r 、 \mathbf{B}_r 、 \mathbf{C}_r 、 \mathbf{D}_r 为相应维数的常阵.

2.1 交叉格莱姆信息

Fernando 和 Nicholson^[10-11] 利用能控系统和能观系统的脉冲响应定义了交叉格莱姆矩阵.

定义 1 时域交叉格莱姆矩阵 对于时间连续渐近稳定的能控能观的单输入单输出 (SISO) 系统

(1) 而言, 系统的时域交叉格莱姆矩阵的定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{cross}} &= \int_0^{\infty} (\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{B})(\exp(\mathbf{A}^T t)\mathbf{C}^T)^T dt \\ &= \int_0^{\infty} \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{B}\mathbf{C}\exp(\mathbf{A}t)dt \end{aligned} \quad (3)$$

由于系统是渐近稳定的, 时域交叉格莱姆矩阵 $\mathbf{G}_{\text{cross}}$ 是如下 Sylvester 方程的唯一正定解:

$$\mathbf{A}\mathbf{G}_{\text{cross}} + \mathbf{G}_{\text{cross}}\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C} = 0 \quad (4)$$

为避免符号混淆, $\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}$ 表示原始全阶系统的时域交叉格莱姆矩阵, $\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{red}}$ 表示降阶系统的时域交叉格莱姆矩阵.

根据交叉格莱姆矩阵的定义以及其与系统能控性和能观性的关系, 定义了系统的交叉格莱姆信息^[9].

定义 2 交叉格莱姆信息 对于渐近稳定线性时不变的 SISO 最小实现系统 (1) 而言, 交叉格莱姆信息 (记为 $I(\mathbf{G}_{\text{cross}})$) 定义为

$$I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}) = \frac{n}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \log(\det \mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}) \quad (5)$$

上式中若对数以 10 为底, 则 $I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}})$ 单位为奈特; 若对数以 2 为底, 则 $I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}})$ 单位为比特; 若对数为自然对数, 则 $I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}})$ 单位为比哈特. 本文采用自然对数.

2.2 CGMIL 基本思路

给出降阶后交叉格莱姆信息损失指标^[9] 为

$$\begin{aligned} \Delta I &= I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}) - I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{red}}) = \left(\frac{n}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \ln(\det \mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}) \right) \\ &\quad - \left(\frac{r}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \ln(\det \mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{red}}) \right) \\ &= \frac{n-r}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} (\ln(\det \mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}) - \ln(\det \mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{red}})) \end{aligned} \quad (6)$$

根据线性系统理论和香农信息熵原理, ΔI 可以由式 (7) 算得

$$\Delta I = \frac{n-r}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=r+1}^n \ln(\lambda_i(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}})) \right) \quad (7)$$

式中 $\lambda_i(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}})$ ($i = r+1, r = 2, \dots, n$) 表示矩阵 $\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}$ 的第 i 个特征值, r 为降阶系统的阶次, 如果降阶系统的阶次选定, $[(n-r)\ln(2\pi e)]/2$ 为常数值, 则显然在矩阵 $\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}$ 的 n 个特征值中选择最小的 $n-r$ 个特征值可以使 ΔI 为最小. 当把列向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 选为相应于矩阵 $\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}$ 的 r 个最大特征值对应的正交特征向量时, 构成的集结矩阵 $\mathbf{A} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r]^T$ 可以使模型降阶产生的 ΔI 为最小.

3 信息损失指标分析 (Analysis on information loss performance index)

由式 (7) 可以看出, 如果消除的特征值 λ_i ($i = r+1, r=2, \dots, n$) 中接近零的特征值比较多, 则 ΔI 有可能为负数, 给人的感觉是降阶后系统的信息反而增加了, 然而 ΔI 真正的含义仅仅是依据它的大小来衡量信息损失的多少, 而与它的符号无关. 假如按照 2.2 节的方法选择集结矩阵获得 r 阶系统, ΔI_1 为某一负数; 若不按照 2.2 节的方法选择集结矩阵获得 r 阶系统, 则 ΔI_2 一定会比 ΔI_1 大, ΔI_2 可能是负数, 也可能是正数. 因此 ΔI_1 虽然是负数, 但是 $\Delta I_1 < \Delta I_2$, ΔI_1 信息损失比较小, ΔI_2 信息损失比较大, 也就是说 ΔI 不是绝对值意义上进行比较的指标, 而是在实数意义上进行比较的指标.

该信息损失指标是依据香农信息熵和 Kullback-Leibler 信息距离提出的, 需要说明的是非负性对于离散信源的信息熵是适用的, 但对于连续信源的信息熵来说这一性质并不存在, 因此 ΔI 有别于传统的非负性指标, 其局限性就在于 ΔI 不满足非负性.

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{full}}^2 &= \text{tr} \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}^T(t-\tau)) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \cdot \exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{B} d\tau dt \right) \\ &= \text{tr} \left(\int_0^\infty \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}^T t) \cdot \left[\int_{-\infty}^0 \exp(-\mathbf{A}^T \tau) \mathbf{B}^T \mathbf{B} \exp(-\mathbf{A} \tau) d\tau \right] \exp(\mathbf{A} t) \mathbf{B} dt \right) = \text{tr} \left(\int_0^\infty \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{W}_o \exp(\mathbf{A} t) \mathbf{B} dt \right) \\ &= \text{tr} \left(\int_0^\infty \exp(\mathbf{A} t) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{W}_o dt \right) = \text{tr}(\mathbf{W}_o \mathbf{W}_c) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (10)$$

式中 κ_{full}^2 表示对应于全阶系统的 Hilbert-Schmidt 范数, σ_i 为系统的 Hankel 奇异值, \mathbf{W}_c 和 \mathbf{W}_o 分别为系统 (1) 的能控性格莱姆矩阵和能观性格莱姆矩阵:

$$\mathbf{W}_c = \int_0^\infty \exp(\mathbf{A} t) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}^T t) dt \quad (11)$$

$$\mathbf{W}_o = \int_0^\infty \exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \exp(\mathbf{A} t) dt \quad (12)$$

系统的 Hankel 奇异值与 $\mathbf{W}_o \mathbf{W}_c$ 的特征值具有等价关系, 下面以定理的形式完整地给出这个关系^[13].

定理 对于稳定的可控可观系统, 系统的 Hankel 奇异值等于 $\mathbf{W}_o \mathbf{W}_c$ 的特征值的正平方根, 即:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o)} \quad (13)$$

4.2 系统 Hilbert-Schmidt 范数信息损失指标

易知式 (5) 可变换为如下形式:

$$4 \left(I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}) - \frac{n}{2} \ln(2\pi e) \right) = \ln(\det(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}})^2) \quad (14)$$

虽然 ΔI 不满足非负性, 但依然可以依据实数意义上的大小来判断信息损失的多或少. 但显然会增加读者的理解负担, 因此有必要找到一个等价的并且满足非负性的指标来替代 ΔI . 为此, 下面将提出 Hilbert-Schmidt 范数意义上的信息损失指标.

4 基于希尔伯特-施密特范数的交叉格莱姆的方法 (Approach to model reduction via Hilbert-Schmidt norm and cross-Gramian)

4.1 系统 Hilbert-Schmidt 范数

给出 SISO 线性系统的 Hilbert-Schmidt 范数^[12]:

$$\kappa^2 = \text{tr} \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \mathbf{h}^T(t-\tau) \mathbf{h}(t-\tau) d\tau dt \right) \quad (8)$$

式中 κ^2 表示 Hilbert-Schmidt 范数, $\mathbf{h}(t-\tau)$ 为系统的马尔可夫参数, 即

$$\mathbf{h}(t-\tau) = \mathbf{C} \exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{B} \quad (9)$$

如果系统是稳定对称的, 则式 (8) 等价于

对于渐近稳定的 SISO 系统而言, 交叉格莱姆矩阵与能控性格莱姆矩阵和能观性格莱姆矩阵具有如下关系^[9]

$$(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}})^2 = \mathbf{W}_c \mathbf{W}_o \quad (15)$$

式 (15) 代入式 (14) 得

$$\begin{aligned} 4 \left(I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}) - \frac{n}{2} \ln(2\pi e) \right) &= \ln(\det(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o)) \\ &= \ln \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o) \right) = \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o) \end{aligned} \quad (16)$$

式 (13) 代入式 (16) 得

$$4 \left(I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}) - \frac{n}{2} \ln(2\pi e) \right) = \sum_{i=1}^n \ln \sigma_i^2 \quad (17)$$

因为 $\ln \sigma_i^2$ 是增函数, 而 ΔI 考察的又是相对大小, 所以可以用 σ_i^2 替代 $\ln \sigma_i^2$. 设 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$, 定义如下关系

$$f \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i^2 \right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (18)$$

将上述关系作用于式 (17) 左右两边得

$$f(4(I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}) - \frac{n}{2}\ln(2\pi e))) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (19)$$

由式 (13) 和式 (14) 得

$$\sigma_i^2 = \lambda_i(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o) = \lambda_i((\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}})^2) \quad (20)$$

式 (20) 代入式 (19) 得

$$f(4(I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}) - \frac{n}{2}\ln(2\pi e))) = \text{tr}((\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}})^2) \quad (21)$$

把式 (20) 代入式 (10) 得

$$\kappa_{\text{full}}^2 = \text{tr}(\mathbf{W}_o \mathbf{W}_c) = \text{tr}((\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}})^2) \quad (22)$$

由式 (21) 和式 (22) 得

$$f(4(I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}) - \frac{n}{2}\ln(2\pi e))) = \kappa_{\text{full}}^2 \quad (23)$$

至此, 可以给出一个新的信息损失指标:

$$\begin{aligned} \Delta J &= f(4(I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}) - \frac{n}{2}\ln(2\pi e))) - \\ &\quad f(4(I(\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{red}}) - \frac{r}{2}\ln(2\pi e))) \\ &= \kappa_{\text{full}}^2 - \kappa_{\text{red}}^2 = \sum_{i=r+1}^n \sigma_i^2 \end{aligned} \quad (24)$$

ΔJ 是系统的 Hilbert-Schmidt 范数意义上的误差指标, 由式 (24) 易知, ΔJ 显然满足非负性.

4.3 基于系统 Hilbert-Schmidt 范数的 CGMIL 算法 (HSC)

下面研究如何使 ΔJ 在降阶后达到最小的问题. 式 (24) 可进一步表示为

$$\Delta J = \kappa_{\text{full}}^2 - \kappa_{\text{red}}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2((\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}})^2) - \sum_{i=1}^r \lambda_i^2((\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{red}})^2) \quad (25)$$

显然, 对于给定系统而言, κ_{full}^2 为固定值, 要使 ΔJ 最小, 就是使 κ_{red}^2 达到最大, 即

$$\min \Delta J = \max \sum_{i=1}^r \lambda_i^2((\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{red}})^2) \quad (26)$$

如果 $\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{red}}$ 能保留 $\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}}$ 的 r 个最大的特征值, 那么就可使 ΔJ 最小. 下面给出 HSC 算法的具体步骤:

输入: 最小实现的稳定的系统 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$

第 1 步: 计算系统的能控性格莱姆矩阵 \mathbf{W}_c 和能观性格莱姆矩阵 \mathbf{W}_o ,

$$\mathbf{W}_c = \text{gram}(\text{sys}, 'c') \quad \mathbf{W}_o = \text{gram}(\text{sys}, 'o') \quad (27)$$

第 2 步: 对 \mathbf{W}_c 进行 Cholesky 分解,

$$[\mathbf{R}, \mathbf{p}] = \text{chol}(\mathbf{W}_c) \quad (28)$$

第 3 步: 对构造矩阵 $\mathbf{R}\mathbf{W}_o\mathbf{R}^T$ 进行奇异值分解

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{R}\mathbf{W}_o\mathbf{R}^T) \quad (29)$$

第 4 步: 构造非奇异矩阵,

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}^{1/4} \mathbf{V}^T (\mathbf{R}^T)^{-1} \quad (30)$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{R}^T \mathbf{U} \mathbf{S}^{-1/4} \quad (31)$$

第 5 步: 计算交叉格莱姆矩阵

$$\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}} = \text{lyap}(\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}) \quad (32)$$

第 6 步: 对交叉格莱姆矩阵进行特征分解

$$\begin{aligned} [\mathbf{V} \quad \mathbf{D}] &= \text{eigs}((\mathbf{G}_{\text{cross}}^{\text{full}})^2, \text{MAX})|_{\text{MAX}=n} \\ \mathbf{V} &= [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \dots, \mathbf{v}_n] \\ \mathbf{D} &= [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n] \end{aligned} \quad (33)$$

式中 \mathbf{v}_i 为对应于 λ_i 的 n 维特征向量.

第 7 步: 系统阶次选择, 若

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \gg \lambda_{r+1} \geq \lambda_{r+2} \geq \dots \geq \lambda_n$$

则选择降阶系统的阶次为 r , 当然如果仿真后系统的近似性能非常好, 为了进一步精简系统, 可以把阶系再选小一些, 总之, 在近似性能可接受的范围内, 降阶系统应该尽量简单一些.

第 8 步: 构造集结矩阵

$$\mathbf{F} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r] \quad (34)$$

第 9 步: 生成伪逆矩阵

$$\mathbf{P} = \text{pinv}(\mathbf{F}) \quad (35)$$

第 10 步: 生成 HSC 降阶系统

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r &= \mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{B}_r &= \mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_r &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{D}_r &= \mathbf{D} \end{aligned} \quad (36)$$

从算法计算的角度考虑, 本方法属于基于 SVD 的方法, 本算法的复杂度与 SVD 相同, 时间复杂度和空间复杂度分别为 $o(n^3)$ 和 $o(n^2)$, 适用于 $n \leq 1000$ 的系统. 当然这并不是绝对的, 适用于多少阶的系统取决于计算机本身的速度和存储容量.

5 数值算例 (Numerical example)

数值算例采用稳定的 24 阶 SISO 模型 (模型数据详见文 [13]), 分别采用 CGMIL 和 HSC 对该模型进行降阶, 分别得到 5 阶模型.

CGMIL 降阶模型为

$$\mathbf{A}_{r1} = \begin{bmatrix} -1.5750 & -1.6660 & -0.8303 & 0.5293 & -0.6453 \\ 3.4110 & -1.4980 & 2.7310 & -2.0790 & 0.4789 \\ -0.7509 & -1.5390 & -0.8858 & -0.6705 & 0.5748 \\ 0.4172 & 1.8630 & 0.0072 & 0.3625 & -3.2690 \\ 0.1949 & 1.0360 & -0.8357 & 3.4790 & -2.8240 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{r1} = [-3.2980, 3.0330, 1.5220, -2.8790, -2.5640]^T, \quad \mathbf{C}_{r1} = [1.4270, 1.9230, -0.1239, 1.9640, -1.2110]$$

HSC 降阶模型为

$$\mathbf{A}_{r2} = \begin{bmatrix} -0.5828 & 2.5810 & 0.5255 & -0.8625 & 0.3212 \\ -2.5810 & -0.9259 & -2.3530 & 2.1450 & -0.4271 \\ 0.5255 & 2.3530 & -0.6736 & 1.3280 & -0.8169 \\ -0.8625 & -2.1450 & 1.3280 & -3.0330 & 4.8600 \\ -0.3212 & -0.4241 & 0.8169 & -4.8600 & -0.4368 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{r2} = [1.1320, 1.0780, -0.6612, 0.9516, 0.2856]^T, \quad \mathbf{C}_{r2} = [-1.1320, 1.0780, 0.6612, -0.9516, 0.2856]$$

5.1 仿真验证 1——奈氏曲线图

绘制原始全阶系统、CGMIL 降阶系统和 HSC 降阶系统的奈氏曲线, 如图 1 所示, HSC 系统的奈氏曲线更逼近全阶系统的奈氏曲线。

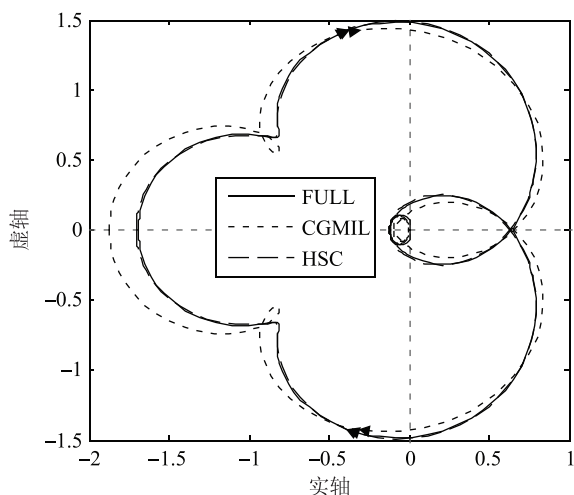


图 1 频率响应曲线

Fig.1 Frequency response curve

5.2 仿真验证 2——输入随机信号

为了比较降阶效果的好坏, 首先对原始全阶系统、CGMIL 降阶系统和 HSC 降阶系统进行零均值高斯白噪声 (点数为 600) 响应的仿真。由仿真结果图 2, HSC 降阶系统的随机误差明显小于 CGMIL 降阶系统的随机误差。

定义如下形式的统计意义上的相对误差

$$E = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(y_r(i) - y(i))^2}{y^2(i)}} \quad (37)$$

式中 y_r 和 y 分别为全阶系统和降阶系统的随机响应输出。对原始全阶系统、CGMIL 降阶系统和 HSC 降阶系统进行 30 次零均值高斯白噪声响应的仿真 (单次点数大于 10 000), 按式 (37) 计算 CGMIL 降阶系统和 HSC 降阶系统的统计意义上的相对误差并绘制相对误差曲线图, 如图 3 所示。可见, 在 30 次

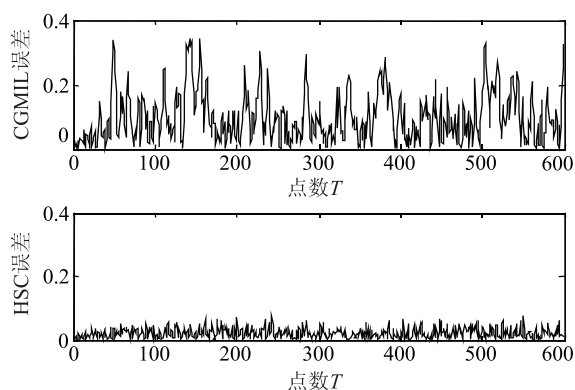


图 2 零均值高斯白噪声随机响应误差

Fig.2 Error of zero-mean Gauss white noise random response

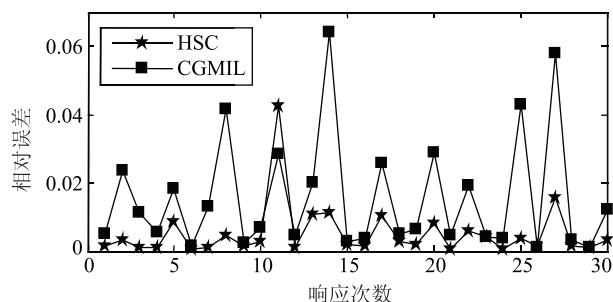


图 3 零均值高斯白噪声随机响应统计意义上的相对误差

Fig.3 Statistical relative error of zero-mean Gauss white noise random response

统计中, 仅有一次 HSC 系统的误差大于 CGMIL 系统的误差。

5.3 仿真验证 3——输入确定信号

对原始全阶系统、CGMIL 降阶系统和 HSC 降阶系统施加正弦信号, 各系统的正弦响应曲线如图 4 所示。可知, HSC 系统正弦响应曲线更加逼近全阶系统正弦响应。

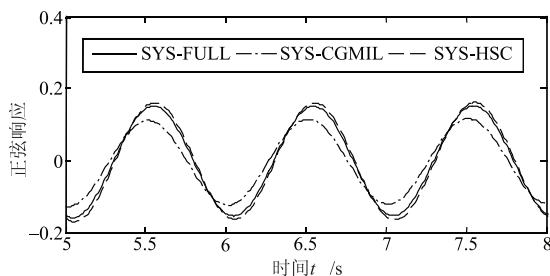


图 4 正弦响应曲线

Fig.4 Sine response curves

对原始全阶系统、CGMIL 降阶系统和 HSC 降阶系统施加阶跃信号, 各系统的阶跃响应曲线如图 5 所示。可知, HSC 系统阶跃响应曲线和 CGMIL 系统阶跃响应的暂态响应都能很接近全阶系统的阶跃响应, 但是, 在稳态阶段 HSC 系统阶跃响应更加逼近全阶系统阶跃响应。

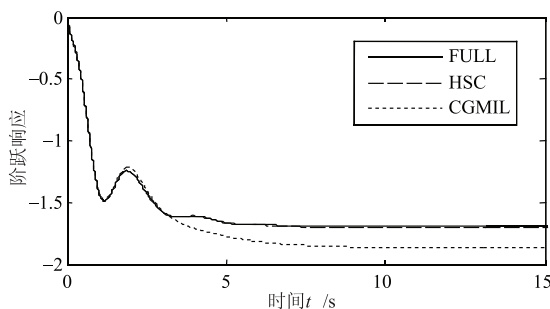


图 5 阶跃响应曲线

Fig.5 Step response curves

6 结论 (Conclusion)

本文分析指出了信息类模型降阶方法的信息损失指标的局限性——不满足非负性和非范数意义的指标, 通过理论推理运算得出 Hilbert-Schmidt 范数意义的误差指标, 提出范数意义指标, 消除了非负性指标带来的误解, 使信息损失指标含义趋于合理化, 并提出了相应的降阶算法。数值算例和仿真分析表明, HSC 算法优于 CGMIL 算法, 具有相对更小的降阶误差。

参考文献 (References)

[1] Mullis C T, Roberts R A. Synthesis of minimum round off noise fixed point digital filters[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1976, 23(9): 551-562.

- [2] Moore B C. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26(1): 17-32.
- [3] Glover K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds[J]. International Journal of Control, 1984, 39(6): 1115-1193.
- [4] Antoulas A C. Approximation of large-scale dynamical systems[M]. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2005.
- [5] Leland R. Reduced-order models and controllers for continuous time stochastic systems: An information theory approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(9): 1714-1719.
- [6] Zhang H, Sun Y X. Information theoretic methods for stochastic model reduction based on state projection[C]//American Control Conference. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2005: 2596-2601.
- [7] 曹清, 章辉, 孙优贤. 改进的用于模型降阶的最小信息损失方法[J]. 信息与控制, 2005, 34(4): 423-428.
- Cao Qing, Zhang Hui, Sun Youxian. A revised minimum information loss method for model reduction[J]. Information and Control, 2005, 34(4): 423-428.
- [8] Tai X, Zhang H, Sun Y X. A minimum output information loss method for stochastic model reduction[C]//6th World Congress on Control and Automation. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2006: 1186-1190.
- [9] 付金宝, 章辉, 孙优贤. 基于交叉格莱姆矩阵的最小信息损失模型降阶方法[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2009, 43(5): 817-821.
- Fu Jinbao, Zhang Hui, Sun Youxian. A method for model reduction by minimizing information loss based on cross-Gramian matrix (CGMIL)[J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2009, 43(5): 817-821.
- [10] Fernando K V, Nicholson H. On the structure of balanced and other principal representations of SISO systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1983, 28(2): 228-231.
- [11] Fernando K V, Nicholson H. Minimality of SISO linear systems[J]. Proceedings of the IEEE, 1982, 70(10): 1241-1242.
- [12] Glover K, Curtain R F, Partington J R. Realisation and approximation of linear infinite-dimensional systems with error bounds[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1988, 26(4): 863-898.
- [13] 付金宝. 基于交叉格莱姆矩阵的最小信息损失模型降阶方法[D]. 杭州: 浙江大学信息科学与工程学院, 2006.
- Fu Jinbao. Minimum information loss method for model reduction based on cross-Gramian matrix(CG MIL)[D]. Hangzhou: College of Information Science and Engineering, Zhejiang University.

作者简介:

付金宝 (1982-), 男, 研究实习员。研究领域为线性系统模型降阶, 控制系统的信息论方法, 航空相机控制系统设计等。

仲崇亮 (1985-), 男, 博士生。研究领域为模型降阶, 神经网络, 模糊控制, 图像处理, 光学仪器结构设计及优化等。

丁亚林 (1964-), 男, 研究员, 博士生导师。研究领域为航空相机结构设计及优化, 航空相机稳像技术等。