

文章编号 : 1003-501X(2006)01-0081-04

小波自适应比例改进算法在图像去噪中的应用

赵继印¹, 郝志成^{2, 3}, 李建坡¹

- (1. 吉林大学 通信工程学院, 吉林 长春 130025 ;
2. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春, 130033 ;
3. 中国科学院研究生院, 北京 100039)

摘要 : 为了改善图像质量和便于识别、压缩等处理, 图像去噪是必不可少的过程。提出一种改进的小波比例萎缩去噪算法, 摒弃单一根据功率谱构造萎缩函数的方法, 在函数式中加入自适应阈值策略。利用局部信号与噪声的小波系数方差比确定阈值, 具有局部适应性强, 重建误差小的特点。Matlab 仿真实验在原始图像加入 $N(0, 20^2)$ 白噪声, 去噪后图像均方误差减小 226, 峰值信噪比提高了 3.722dB ; 而且重建图像视觉效果更好, 并能保持图像边缘细节。

关键词 : 图像去噪 ; 小波变换 ; 比例萎缩法 ; 峰值信噪比 ; 像值改善

中图分类号 : TP391.41

文献标识码 : A

Image denoising using improved adaptive proportion-shrinking algorithm in Wavelet field

ZHAO Ji-yin¹, HAO Zhi-cheng^{2, 3}, LI Jian-po¹

- (1. College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China ;
2. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, the CAS, Changchun 130033, China ;
3. Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract : To improve the quality of image and facilitate image further processing – recognition, compression and so on, it is necessary to denoise image. An improved proportion-shrinking algorithm in wavelet denoising was proposed, in which a threshold strategy was added to proportion-shrinking algorithm instead of simplex strategy of signal power. The threshold was educed according to the square error ratio of wavelet coefficient of local signal and noise. It has a good locally adaptive adaptability and a characteristic of less reconstruction error. The $N(0, 20^2)$ Gaussian white noise is added to the original image for MATLAB simulation. Results show the MSE (mean square error) of the denoised image can decrease 226 and the PSNR is improved by 3.722dB. The reconstructed image has better visual effect with clear edge information.

Key words : Image denoising; Wavelet transform; Proportion-shrinking algorithm; PSNR; Image quality improvement

引 言

对于图像信号的去噪处理, 一直以来都是图像处理领域的重点研究问题之一。对于图像信号而言, 信号主要分布在低频区域, 而噪声主要分布在高频区域, 同时图像的细节也分布在高频区域。所以, 图像信号去噪中一直存在一个尚未得到很好解决的问题, 即传统的滤波方法(如短时傅里叶变换)在去除随机噪声

收稿日期 : 2005-02-16 ; 收到修改稿日期 : 2005-09-05

基金项目 : 吉林省科学技术委员会自然科学基金项目(20000544)

作者简介 : 赵继印(1961-), 男(汉族), 吉林长春人, 教授, 主要研究工作是信号检测和数字图像处理。E-mail: zhaojiyin2000@163.com

的同时会引起图像边缘模糊,若保留和增强图像边缘则又增大了图像的噪声。本文提出改进的比例萎缩法在去除图像噪声的同时,能够有效地保留图像边缘细节,为图像去噪提供了新的方法和手段。

1 噪声的小波域特性及去噪原理

假设函数 $f(t) \in L^2(R)$, 定义 $f(t)$ 的连续小波变换为

$$W_f(a, b) = \langle f, \varphi_{a,b} \rangle = \int f(t) a^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (1)$$

式中 $\varphi_{a,b}(t) = a^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ 称为母小波函数, a 是尺度参数, b 是时移参数。对 a 和 b 进行离散化处理, 相应的离散小波变换可以定义如下^[1]

$$W_f(j, k) = a_0^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(a_0^{-j} t - k b_0) dt \quad (2)$$

式中 a_0 和 b_0 分别是离散尺度和位移的步长, j 为分解级数。设一个被噪声污染的信号的基本模型为

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (3)$$

式中 $s(t)$ 是信号, $n(t)$ 是一个服从 $N[0, \sigma_n^2]$ 的宽平稳高斯白噪声。令 $WT_n(j, k)$ 是 $n(t)$ 的小波变换, 则有

$$WT_n(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} n(u) \varphi_j(k - u) du \quad (4)$$

而

$$|WT_n(j, k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(u) \varphi_j(k - u) n(v) \varphi_j(k - v) du dv \quad (5)$$

又因为 $E\{n(u)n(v)\} = \sigma_n^2 \delta(u - v)$, 所以得

$$\begin{aligned} E\{|WT_n(j, k)|^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{n(u)n(v)\} \varphi_j(k - u) \varphi_j(k - v) du dv \\ &= \sigma_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - v) \varphi_j(k - u) \varphi_j(k - v) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_j(k - u)|^2 du = \frac{\sigma_n^2 \|\varphi\|^2}{j} \end{aligned} \quad (6)$$

从(6)式可看出, 噪声小波系数的平均功率与尺度 j 成反比。可证明, 对于所有尺度, 噪声 $n(t)$ 的小波变换离散细节信号系数的方差随着尺度的增加也会有规律地减小, 即 $D_j = D_{j-1}/2$ 。其中, D_j, D_{j-1} 为方差。而信号 $s(t)$ 的小波变换并不满足(6)式^[2], 其平均功率与尺度 j 无关。根据需要对带噪信号 $x(t)$ 进行 M 级小波分解得到离散逼近信号(信号的低频部分)和离散细节信号(信号的高频部分和噪声部分), 由于噪声功率随着分解级数的增加而不断减少, 而信号高频部分功率不变, 这样就可以按照一定的原则消除或减弱噪声, 提高信噪比。

2 比例萎缩去噪算法

根据上述噪声的小波域特性, 目前提出的小波去噪算法有两大类: 阈值法和比例萎缩法。阈值法最早是在 1995 年由 Stanford 大学的 D.Donoho 和 I.Johnstone 提出的^[3], 虽然阈值法在信号去噪中取得了较好的效果, 但由于阈值法将所有小系数置零, “扼杀”了一些有用的高频信号, 所以造成重建图像边缘模糊。

而比例萎缩有更大的灵活性, 其特点主要在于它具有对信号局部的适应能力, 从而能克服阈值法重建图像带来的畸变和损伤。比例萎缩法去噪的依据是, 将图像信号任一像素点的小波系数方差视为与周围像素点小波系数方差是高度相关的, 利用这种相关性依据某种准则来确定比例萎缩函数。

2.1 比例萎缩函数

在比例萎缩法中, 能否正确建立信号的数学统计模型是十分关键的。我们采用一种简单有效的统计模型, 即假设各级图像小波系数服从零均值而方差未知的广义高斯分布(GG) $\sim N(0, \sigma_s^2)$, 并且各系数之间相互独立, 它的方差域是局部平滑并且变化缓慢的。

针对(3)式描述的观测信号, 离散化之后得到 $x(k) = s(k) + n(k)$, 经过小波变换后, 得到 $X(k) = S(k) + N(k)$,

$k=0, 1, 2, \dots$ 。 $X(k)$ 是带噪信号的小波系数, $S(k)$ 是原始信号的小波系数, $N(k)$ 是噪声的小波系数。根据最小均方差准则(MMSE), 可以得出从 $X(k)$ 中恢复 $S(k)$ 的理想函数式。这里, 省略推导过程直接给出结果^[4]

$$\hat{S}(k) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_n^2} X(k) \quad (7)$$

式中 σ_s^2 是图像小波系数 $S(k)$ 的方差, σ_n^2 是噪声小波系数的方差。由于 σ_s^2 和 σ_n^2 来自于未知的方差域, 实际处理中不可能知道, 所以必须对 σ_s^2 和 σ_n^2 进行估计, 用估计值 $\hat{\sigma}_s^2$ 和 $\hat{\sigma}_n^2$ 来代替 σ_s^2 和 σ_n^2 。

2.2 信号小波系数方差的估计

在比例萎缩法中, 信号小波系数方差 σ_s^2 的估计是关键问题。本文给出一种空域局部自适应估计法^[5]。因为信号小波系数的方差域局部平滑并且变换缓慢, 所以每一个数据点的小波系数 $X(k)$ 的方差与邻域 $\Omega(k)$ (一般选择方形邻域) 内小波系数的方差都具有高度相关性。为了计算 $\sigma_s^2(k)$ 的最佳估计值, 假设已经得到 $\sigma_s^2(k)$ 的一组估计值 $\Theta_s^2(k)$, 在 $\Theta_s^2(k)$ 中只有一个值是最佳的, 它应当满足使

$$E|\hat{S}(k) - S(k)|^2 = \min \quad (8)$$

$\hat{S}(k)$ 由(7)式计算求得(用 $\Theta_s^2(k)$ 代替 σ_s^2)。这样, 就得到 $\sigma_s^2(k)$ 的最佳估计值:

$$\hat{\sigma}_s(k) = \arg \min E|\hat{S}(k) - S(k)|^2 \quad (9)$$

但通过上式很难求出结果, 所以用小波系数方差的均方差来近似代替式(9), 即:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_s(k) &= \arg \min_{\Theta_s} E|\sigma_s(k) - \Theta_s(k)|^2 \\ &= \arg \min_{\Theta_s} \{E[\Theta_s(k)] - \sigma_n(k)\}^2 + \text{Var}[\Theta_s(k)] \end{aligned} \quad (10)$$

考虑到式(10)中第一项的不可实现性, 而且起主要作用的是第二项, 这样得到 $\hat{\sigma}_s(k)$ 的近似计算公式:

$$\hat{\sigma}_s^2(k) = \max(0, \sum_{l \in \Omega(k)} X^2(l) - \sigma_n^2) \quad (11)$$

2.3 噪声小波系数方差的估计

对于噪声小波系数方差的估计, 一般依靠最细尺度上的小波系数来估计噪声的方差。因为在最细的尺度上, 分辨力最高, 信噪比很小, 可以认为这一层次上主要是噪声。而且, 在最细尺度上包括了所有小波系数数量一半之多。 σ_n^2 的估计值可以采用绝对偏差的中值(MAD)方法来计算:

$$\hat{\sigma}_n = 1/0.6745 \times \text{MAD}[d^{(J-1)}] = 1.4826 \times \text{Median}[|\bar{d}^{(J-1)} - \text{Median}(\bar{d}^{(J-1)})|] \quad (12)$$

其中 $\bar{d}^{(J-1)}$ 是表征最细尺度上的小波系数的向量。在实际应用中, 取式(13)也可取得同样精确的结果, 我们称之为 MAD 改进法:

$$\hat{\sigma}_n = 1.4826 \times \text{Median}[|\bar{d}^{(J-1)} - \text{Mean}(\bar{d}^{(J-1)})|] \quad (13)$$

3 比例萎缩法的改进

由于比例萎缩法采用了局部适应性强的系数模型, 所以重构的小波系数能够很好地适应信号的局部特征, 因而去噪后的重建误差通常比阈值法小, 但是由于比例萎缩法保留了很多的小系数, 而这些小系数多以噪声成分为主, 经过反变换后重建图像会出现小毛刺, 所以通常无法像阈值法那样得到光滑的重建信号。下面针对这一点, 对比例萎缩法提出改进。

由于比例萎缩法对小波系数“过保留”, 所以对其加入阈值策略。将(3)式的观测信号, 由一维扩展到二维, 则其改进后的比例萎缩函数式为

$$\hat{S}(i, j) = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_s^2(i, j)}{\hat{\sigma}_s^2(i, j) + \hat{\sigma}_n^2} X(i, j) & |X(i, j)| \geq \lambda \\ 0 & |X(i, j)| < \lambda \end{cases} \quad (14)$$

式中 (i, j) 表示像素点的位置, λ 为阈值门限。可以看出, 当带噪图像的小波系数 $X(i, j)$ 大于给定阈值时, 式(14)与比例萎缩函数相同; 而当 $X(i, j)$ 小于 λ 时, 去噪后图像小波系数 $\hat{S}(i, j)$ 被置零, 与软阈值法相同。

公式(14)中阈值 λ 的选取很关键。根据局部信号与噪声的能量分布特点, 本文采用的是空域自适应局部阈值, 这里不加推导地给出一种近似计算公式^[6]:

$$\lambda = \sigma_n^2(i, j) / \sigma_s(i, j)$$

(15)

式(15)不仅是理想值很好的近似, 而且非常直观。对阈值 λ 标准化后有 $\lambda / \sigma_n = \sigma_n / \sigma_s$; 可以看出, λ / σ_n 反比于信号的标准差 σ_s , 正比于噪声的标准差 σ_n 。当 $\sigma_n / \sigma_s \ll 1$ 时, 信号要远远强于噪声, 所以 λ / σ_n 要选的小一点, 以保留信号而去除噪声; 当 $\sigma_n / \sigma_s \gg 1$ 时, 小波系数里噪声占主要成份, 这时 λ / σ_n 就要大一些, 这样才能消除大部分噪声。由此可见, 这种阈值选择能够同时适应信号和噪声的特性。

4 仿真结果及分析

下面以 256×256 的 Woman 图像为例, 在 MATLAB 中进行仿真。所加噪声为零均值, 标准方差 $\sigma = 20$ 的高斯白噪声, 小波基选取双正交小波, 分解层数为三层。表 1 和图 1 分别为几种不同算法的去噪结果比较和示图, 选用图像的峰值信噪比(PSNR)和均方误差(MSE)作为评价标准。

表 1 几种不同算法去噪结果的比较

Table 1 Results comparison of different denoising algorithms

Algorithms	MSE	PSNR/dB
Noisy image	398.313	22.032
Hard threshold	298.800	23.377
Soft threshold	257.621	24.021
Proportion-shrinking	194.438	25.243
Improved proportion-shrinking	172.854	25.754

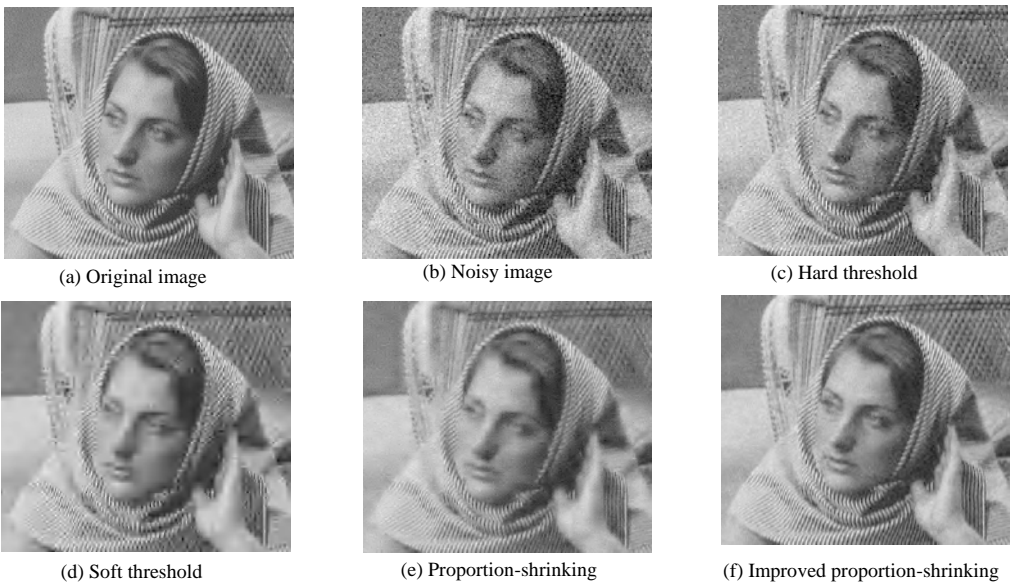


图 1 几种不同算法的去噪结果比较

Fig.1 Results comparison of different denoising algorithms

5 结 论

在分析了噪声的小波特性和小波去噪原理的基础上, 本文针对图像信号提出了一种改进的小波比例萎缩去噪算法, 在比例萎缩法中加入局部自适应阈值策略, 构造出一种新的比例萎缩函数式, 并对噪声及信号的局部小波系数方差进行了估计。根据局部信号与噪声的能量空间分布特点得出自适应阈值。计算机仿真分析表明, 该算法克服了传统阈值法和比例萎缩法的弊端, 重建误差小, 局部适应性强; 不仅 PSNR 能达到 25.754dB, 而且重建图像既没有边缘模糊, 也没有毛刺现像, 为图像去噪提供了一种新途径。

参考文献:

[1] 杨福生.小波变换的工程分析与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

YANG Fu-sheng. The Engineering Analysis and Application of Wavelet Transform [M]. Beijing: Science Press, 1999.

1) 测量精度较高、响应速度快、动态特性好、结构简单、使用方便、可以进行三自由度转角测量等。系统测量范围 $\pm 1^\circ$ ，响应频率 4kHz，测量总 RMS 误差为：静态测试总 RMS 误差 0.35'，动态测试总 RMS 误差 0.36'。

2) 系统标定从确定基准零位、PSD 纵横比、PSD 坐标系与被测物体坐标系的旋转角度等三个方面入手建立测量模型，消除了光电接收器件安装时存在的误差，提高了测试精度。

3) 系统可以推广到检测一个任意物体在空间的位置和姿态。如目标跟踪，机器人的定位识别系统，空间站对接，海洋工程中的水池模型试验，人体运动分析，机械加工中的形位公差的检测等。

4) 系统已成功应用于某型号仪器半实物仿真实验中，并取得了满意的结果。

在应用于高精度和高速的测量过程时，本系统的测量精度和响应速度还需要进一步的提高，可以采用的方法是：建立准确的激光自准直测量模型，分别针对系统误差和安装误差进行校正，优化系统采集计算程序，从而满足测量的指标。

参考文献：

- [1] 浦昭邦, 陶卫, 张琢. 角度测量的光学方法[J]. 光学技术, 2002, 28(2): 168-171.
PU Zhao-bang, TAO Wei, ZHANG Zhuo. Angle measuring with optical methods[J]. **Optical Technique**, 2002, 28(2): 168-171.
- [2] 张彩妮, 王向朝. 微角度的光学测量[J]. 光电子·激光, 2002, 13(4): 416-419.
ZHANG Cai-ni, WANG Xiang-zhao. Optical methods for measuring small angles [J]. **Journal of Optoelectronics · Laser**, 2002, 13(4): 416-419.
- [3] 王建林, 朱明武, 崔秀华. 一种新颖的单线阵 CCD 双坐标自准直仪[J]. 仪器仪表学报, 2000, 21(3): 229-232.
WANG Jian-lin, ZHU Ming-wu, CUI Xiu-hua. A novel single linear CCD two-dimensional auto-collimator [J]. **Chinese Journal of Scientific Instrument**, 2000, 21(3): 229-232.
- [4] C. NARAYANAN, A. BRUCE BUCKMAN, I. BUSCH-VISHNIAC, et al. Position dependence of the transient response of a position-sensitive detector under periodic pulsed light modulation [J]. **IEEE Trans. on Electron Devices**, 1993, 40(9): 1688-1694.
- [5] Dahong QIAN, Wanjun WANG, ILENE J. BUSCH-VISHNIAC, et al. A Method for Measurement of Multiple Light Spot Positions on One Position-Sensitive Detector (PSD) [J]. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, 1993, 42(1): 14-18.

~~~~~  
(上接第 84 页)

- [2] GROSSMAN A. **Wavelet transform and edge detection, Stochastic process in physics and engineering**[M]. Dordrecht: Reidel Pub. Co, 1986. 128-145.
- [3] DONOHO D L, JOHNSTONE I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. **Journal of the American Statistical Association**, 1995, 90(12): 1200-1224.
- [4] MIHCAK M K, KOZINTSEV I, RAMCHANDRAN K, et al. Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficient[J]. **IEEE Trans. On Signal Processing**, 1999, 6(12): 300-303.
- [5] MIHCAK M K, KOZINTSEV I, RAMCHANDRAN K. Spatially adaptive statistical modeling of wavelet image coefficients and its application to denoising[J]. **IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Proc., Phoenix, AZ**, 1999, 6: 3253-3256.
- [6] CHING P C, SO H C, WU S Q. On wavelet denoising and its application to time delay estimation[J]. **IEEE Trans. Signal Processing**, 1993, 47(10): 2879-2882.