文章编号：1005-6734(2011)04-0393-06

激光捷联惯导系统的外场动态标定方法

杨晓霞，孟浩然，王 帅

（中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所，长春 130033）

摘要：激光捷联惯导系统的误差参数随着时间的推移会发生变化，为了实现惯导系统长期稳定使用且不拆装系统，需要对外场动态条件下激光陀螺捷联惯导系统的系统级标定方法进行研究。首先根据线性时变系统的可观测性判据详细地分析了动态条件下捷联惯导系统的可观测性，从而给出了完全激励惯导系统 12 个误差参数(加速度计零偏、标度因数误差以及陀螺零偏、标度因数误差)的必要条件，进一步根据必要条件给出了一种能标定出 12 个误差参数的可行动态标定路径，并且验证了该路径下系统的完全可观测性。仿真结果表明，在该路径下激光惯组的 12 个误差参数都是可估计的，陀螺零偏的估计误差在设定值的 3%以内，陀螺标度因数误差的估计误差在设定值的 7%以内，加表零偏的估计误差在设定值的 2%以内，加表标度因数误差的估计误差在设定值的 3%以内。

关 键 词：外场标定；线性时变系统；可观测性；动态设计

中图分类号：U666.1 **文献标志码：**A

Calibration method for laser gyro SINS under outer field dynamic conditions

YANG Xiao-xia, MENG Hao-ran, WANG Shuai

(Changchun Institute of Optics, Fine Mechnics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

Abstract: The error parameters for laser gyro strapdown inertial navigation system (SINS) would change with the time. In order to realize its long-term stabilization and avoid mounting / demounting the system, it is necessary to find a suitable systematic calibration method for the SINS under outer field conditions. Based on the observability criterion of linear time-varying systems, the necessity conditions for the dynamic route which can calibrate all the 12 error parameters are proposed. A feasible dynamic calibration route is given which can calibrate all the 12 parameters of the system, and it is verified that the system is completely observable under this route. The simulation results show that, under this dynamic route, the estimated error for gyro bias is less than 3%, the estimated error for gyro scale factor error is less than 7%, the estimated error for accelerator bias is less than 2%, and the estimated error for accelerator scale factor error is less than 3%。

Key words: calibration in the outer field; linear time-varying system; observability; dynamic design

标定技术根据场所的不同可以分为实验室内标定和外场标定。目前实验室内的标定技术已经发展的相对比较完善，但是为了适应惯导系统的长期稳定使用和避免从机组上拆装的麻烦，需要研究惯组的外场在线标定。文献[1]对外场静基座条件下（即仅有速度误差和位置误差信息）系统的可观测性进行了详尽的分析，指出在没有精确初始姿态信息的情况下，捷联惯组的零偏在单一位置全部不能观，并且进一步给出了为估计惯组零偏，在外场不依赖转台而需要放置的最少位置数。本文研究外场动态条件下惯组 12 个误差参数(陀螺和加速度计零偏以及标度因数误差)的在线标定方法。

由于外场标定不依赖于实验室的设备(如精确的转台等)，仅仅依靠外测设备(如 GPS 或测速仪等)提供

收稿日期：2011-3-25；**修回日期：**2011-07-26

基金项目：中国科学院三期创新基金资助项目

作者简介：杨晓霞（1984—），女，助理研究员，从事精密伺服跟踪和系统辨识研究。E-mail：1984-yxx@163.com

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的速度和位置信息来对系统进行标定，它的难点之一在于没有足够多的精确基准信息，这将影响到整个系统的可观测性。现有文献中对外场动态条件下系统的可观测性分析常采用的方法有将系统近似为分段线性定常系统(PWCS)的可观测性分析方法和基于奇异值分解求状态可观测度的分析方法等。本文根据线性时变系统的可观性判别定理，给出了设计外场动态运动来充分激励误差参数的原则。

文章第 1 节给出了捷联惯导系统动态条件下的导航误差方程，第 2 节给出了线性时变系统的可观测性判据，第 3 节对动态条件下激光捷联惯导系统的可观测性进行了分析，并且分析了在设计动态轨迹时，使得误差参数得到充分激励的必要条件。第 4 节给出了一种可行的运动轨迹设计，使得在此运动下系统的 12 个误差参数都是可估计的，并且对此运动路径进行了仿真验证，最后为本文小结。

1 捷联惯导系统的导航误差方程

根据文献[1][2]中的分析，外场条件下激光捷联惯性导航系统的误差参数在单一位置都是不能观的。因此本文进一步研究是否可以通过外场动态运动实现系统 12 个误差状态的完全可观测。

首先给出外场动态条件下系统的误差方程[1][2]。记北西天(NEU)导航系为 p，机体系为 b，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}$ 是 b 系到 p 系的变换矩阵，即捷联矩阵。设加表的标度因数误差为 $\delta\boldsymbol{K}_{\mathrm{a}}=\left[\delta k_{\mathrm{ax}}\quad \delta k_{\mathrm{ay}}\quad \delta k_{\mathrm{az}}\right]^{\mathrm{T}}$，零偏为 $\overline{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{b}}=\left[\overline{\Delta}_x\quad \overline{\Delta}_y\quad \overline{\Delta}_z\right]^{\mathrm{T}}$，陀螺的标度因数误差为 $\delta\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}=\left[\delta k_{\mathrm{gx}}\quad \delta k_{\mathrm{gy}}\quad \delta k_{\mathrm{gz}}\right]^{\mathrm{T}}$，零偏为 $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{b}}=\left[\overline{\varepsilon}_x\quad \overline{\varepsilon}_y\quad \overline{\varepsilon}_z\right]^{\mathrm{T}}$，则加表和陀螺的总量测误差分别为：

$$\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{b}}=\overline{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}}\delta\boldsymbol{K}_{\mathrm{a}}=\begin{bmatrix}\overline{\Delta}_x\\ \overline{\Delta}_y\\ \overline{\Delta}_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_x & 0 & 0\\ 0 & a_y & 0\\ 0 & 0 & a_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta k_{\mathrm{ax}}\\ \delta k_{\mathrm{ay}}\\ \delta k_{\mathrm{az}}\end{bmatrix}\tag{1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{b}}=\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{D}_{\mathrm{g}}\delta\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}=\begin{bmatrix}\overline{\varepsilon}_x\\ \overline{\varepsilon}_y\\ v_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_x & 0 & 0\\ 0 & \omega_y & 0\\ 0 & 0 & \omega_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta k_{\mathrm{gx}}\\ \delta k_{\mathrm{gy}}\\ \delta k_{\mathrm{gz}}\end{bmatrix}\tag{2}$$

式中：a_i 是 i 加表测得的加速度；ω_i 是 i 陀螺测得的角速度。取捷联惯性导航系统的误差状态向量为：

$$\boldsymbol{X}=\left[\delta V^{\mathrm{T}}\quad \delta P^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\quad \left(\overline{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}}\quad \left(\delta K_{\mathrm{a}}\right)^{\mathrm{T}}\quad \left(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}}\quad \left(\delta K_{\mathrm{g}}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}_{21\times1}$$

其中 $\delta\boldsymbol{V}=\left[\delta V_N\quad \delta V_W\quad \delta V_U\right]^{\mathrm{T}}$，$\delta\boldsymbol{P}=\left[\delta L\quad \delta\lambda\quad \delta h\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\phi}=\left[\phi_N\quad \phi_W\quad \phi_U\right]^{\mathrm{T}}$ 分别表示系统的导航速度误差、位置误差和姿态误差。

由于外场条件下可以借助 GPS 或测速仪来提供载体的位置和速度基准信息，因此取系统的观测量为速度误差和位置误差，即

$$\boldsymbol{Z}=\left[\delta\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\quad \delta\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

则系统的系统误差方程和量测方程为[1]：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)\\ \boldsymbol{Z}(t)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}(t)\end{cases}\tag{3}$$

其中：

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{VV}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{Vp}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{Vf}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}} & 0 & 0\\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{PV}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{PP}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{fV}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{fp}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{ff}} & 0 & 0 & -\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}} & -\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{g}}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{21\times21},$$

$\boldsymbol{H}=\left[\boldsymbol{I}_{6\times6}\quad 0\quad\right]_{6\times21}$，各子矩阵 $\boldsymbol{A}_{ij}(i,j=V,P,\phi)$ 的具体形式参见文献[1]。

2 线性时变系统的可观性判据

考虑自治线性时变系统如下：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{X}\end{cases}\tag{4}$$

下面我们给出基于系统矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 和观测矩阵 $\boldsymbol{C}(t)$ 的可观测性判据。

定理 1（充分条件） 设 n 维动态方程(4)之矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 和 $\boldsymbol{C}(t)$ 在 $[t_0,t_1]$ 上是 n-1 阶连续可微的，若存在有限时刻 $t^*\in[t_0,t_1]$ 使得：

$$\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{F}(t^*)\right)=n\tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{F}(t)=\left[N_0(\mathrm{t})\quad N_1(\mathrm{t})\quad L\quad N_{n\text{-}1}(\mathrm{t})\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{N}_0(t)=\boldsymbol{C}(t)$，$\boldsymbol{N}_{k+1}(t)=\boldsymbol{N}_k(t)\boldsymbol{B}(t)+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}_k(t)}{\mathrm{d}t}$，$k=0,1,...,n-2$，则系统在 $[t_0,t_1]$ 上是可观测的。

定理 2（充分必要条件） 设 n 维动态方程之矩阵阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 和 $\boldsymbol{C}(t)$ 在 $[t_0,t_1]$ 上是解析的，则对 $[t_0,t_1]$ 中几乎所有的 t^*，条件(5)是系统(4)在 $[t_0,t_1]$ 上可观测的充分必要条件。

直接对 21 阶的系统(3)进行可观性分析会比较复杂，下面可以运用设计降阶观测器的思想将系统降阶从而使得系统的可观性分析得到简化。

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3　动态条件下捷联惯导系统的可观性分析

令 $\boldsymbol{X}_1=\left[\delta\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\quad\delta\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{X}_2=\left[\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\quad\left(\overline{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}}\quad\left(\delta\boldsymbol{K}_{\mathrm{a}}\right)^{\mathrm{T}}\quad\left(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}}\quad\left(\delta\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

则系统(3)可写成：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}_1=\boldsymbol{A}_{11}(t)\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{A}_{12}(t)\boldsymbol{X}_2\\ \dot{\boldsymbol{X}}_2=\boldsymbol{A}_{21}(t)\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{A}_{22}(t)\boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{Z}(t)=\boldsymbol{X}_1(t)\end{cases}\tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{A}_{ij}(t)(i,j=1,2)$ 是分块矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 中与状态 $\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$ 对应的分块矩阵。由于状态 $\boldsymbol{X}_1$ 是直接观测量，显然它是可观测的，记：

$$\boldsymbol{Y}\triangleq\boldsymbol{A}_{12}(t)\boldsymbol{X}_2=\dot{\boldsymbol{X}}_1-\boldsymbol{A}_{11}(t)\boldsymbol{X}_1=\dot{\boldsymbol{Z}}(t)-\boldsymbol{A}_{11}(t)\boldsymbol{Z}(t),$$

则式(6)变为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}_2=\boldsymbol{A}_{22}(t)\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{A}_{21}(t)\boldsymbol{Z}(t)\\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}_{12}(t)\boldsymbol{X}_2\end{cases}\tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{V\varphi}&\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}&\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}}&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，即 $\boldsymbol{Y}$ 的后三个分量恒为零。令 $\overline{\boldsymbol{Y}}$ 表示 $\boldsymbol{Y}$ 的前三个分量，$\overline{\boldsymbol{A}}_{12}$ 表示 $\boldsymbol{A}_{12}$ 的前三行，则系统(7)可以等价写为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}_2=\boldsymbol{A}_{22}(t)\boldsymbol{X}_2(t)+\boldsymbol{A}_{21}(t)\boldsymbol{Z}(t)\\ \overline{\boldsymbol{Y}}=\overline{\boldsymbol{A}}_{12}(t)\boldsymbol{X}_2(t)\end{cases}\tag{8}$$

于是讨论系统(1)的状态 X 的可观测性等价于讨论系统(8)中状态 X_2 的可观测性。又由于系统的可观测性分析与直接观测量 $\boldsymbol{A}_{21}(t)\boldsymbol{Z}(t)$ 无关，因此下面只需考虑系统(8)的齐次系统中状态 $\boldsymbol{X}_2$ 的可观测性问题：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\phi}}\\ \dot{\overline{\boldsymbol{\Delta}}}^{\mathrm{b}}\\ \delta\dot{\boldsymbol{K}}_a\\ \dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathrm{b}}\\ \delta\dot{\boldsymbol{K}}_g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\varphi\varphi}&0&0&-\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}&-\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{g}}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}\\ \overline{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{b}}\\ \delta\boldsymbol{K}_{\mathrm{a}}\\ \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{b}}\\ \delta\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}\end{bmatrix}\\ \overline{\boldsymbol{\Psi}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{V\boldsymbol{\phi}}&\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}&\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}}&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}\\ \overline{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{b}}\\ \delta\boldsymbol{K}_{\mathrm{a}}\\ \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{b}}\\ \delta\boldsymbol{K}_g\end{bmatrix}\end{cases}\tag{9}$$

要根据定理 1 或定理 2 来分析系统(9)的可观测性，首先应该计算相应的矩阵 $\boldsymbol{F}(t)$，根据系统(9)中矩阵的特殊形式，设 $\boldsymbol{N}_i(t)=[\boldsymbol{N}_{i1}(t)\quad\boldsymbol{N}_{i2}(t)\quad\boldsymbol{N}_{i3}(t)]$，$i=0,\cdots,n-1$，其中 $\boldsymbol{N}_{i1}(t)$ 是 3×3 方阵，$\boldsymbol{N}_{i2}(t)$ 和 $\boldsymbol{N}_{i3}(t)$ 是 3×6 矩阵，记 $\boldsymbol{J}_{\omega}(t)=[\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}\quad\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{g}}]$，$\boldsymbol{J}_a(t)=[\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}\quad\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}}]$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{i+1}(t)&=\boldsymbol{N}_i(t)\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\varphi\varphi}&0&-\boldsymbol{J}_{\omega}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}_i(t)}{\mathrm{d}t}\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\varphi\varphi}&0&-\boldsymbol{J}_{\omega}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_{i1}(t)\\ \boldsymbol{N}_{i2}(t)\\ \boldsymbol{N}_{i3}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\&=\left[\dot{\boldsymbol{N}}_{i1}(t)+\boldsymbol{N}_{i1}(t)\boldsymbol{A}_{\phi\phi}\quad\dot{\boldsymbol{N}}_{i2}(t)\quad\dot{\boldsymbol{N}}_{i3}(t)-\boldsymbol{N}_{i1}(t)\boldsymbol{J}_{\omega}\right]\end{aligned}\tag{10}$$

即有 $\boldsymbol{N}_{(i+1)1}(t)=\dot{\boldsymbol{N}}_{i1}(t)+\boldsymbol{N}_{i1}(t)\boldsymbol{A}_{\phi\phi}$，$\boldsymbol{N}_{(i+1)2}(t)=\dot{\boldsymbol{N}}_{i2}(t)$，$\boldsymbol{N}_{(i+1)3}(t)=\dot{\boldsymbol{N}}_{i3}(t)-\boldsymbol{N}_{i1}(t)\boldsymbol{J}_{\omega}$，其中 $\boldsymbol{N}_{01}(t)=\boldsymbol{A}_{V\phi}$，$\boldsymbol{N}_{02}(t)=\boldsymbol{J}_a(t)$，$\boldsymbol{N}_{03}(t)=0$。所以矩阵 $\boldsymbol{F}(t)$ 可以写成如下分块矩阵的形式：

$$\boldsymbol{F}(t)=\left[\boldsymbol{F}_1(t)\quad\boldsymbol{F}_2(t)\quad\boldsymbol{F}_3(t)\right]$$

其中

$$\boldsymbol{F}_1(t)=\begin{bmatrix}N_{01}(t)\\ \vdots\\ N_{(n-1)1}(t)\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}_2(t)=\begin{bmatrix}N_{02}(t)\\ \vdots\\ N_{(n-1)2}(t)\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}_3(t)=\begin{bmatrix}N_{03}(t)\\ \vdots\\ N_{(n-1)3}(t)\end{bmatrix}。$$

注 1：递推公式(10)将原来的 15 阶递推计算问题转换为 3 阶和 6 阶递推计算问题，这样使得验证矩阵 $\boldsymbol{F}(t)$ 是否列满秩的计算得到简化，且可以进一步通过对各个子矩阵列满秩的分析给出设计运动方式的指导原则。

矩阵 $\boldsymbol{F}(t)$ 列满秩的必要条件是矩阵 $\boldsymbol{F}_1(t)$、$\boldsymbol{F}_2(t)$、$\boldsymbol{F}_3(t)$ 均是列满秩的，下面分别分析各个子矩阵 $\boldsymbol{F}_i(t)(i=1,2,3)$。首先讨论 $\boldsymbol{F}_1(t)$ 列满秩的条件，根据(10)给出的递推关系，有

$$\boldsymbol{N}_{(i+1)1}(t)=\dot{\boldsymbol{N}}_{i1}(t)+\boldsymbol{N}_{i1}(t)\boldsymbol{A}_{\phi\phi},\quad\boldsymbol{N}_{01}(t)=\boldsymbol{A}_{V\phi}\tag{11}$$

因此，存在 t^* 使得矩阵 $\boldsymbol{F}_1(t^*)$ 是列满秩的充要条件就是下面系统是可观测的

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)=\boldsymbol{A}_{\phi\phi}\boldsymbol{\phi}(t)\\ \overline{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{A}_{V\phi}(t)\boldsymbol{\phi}(t)\end{cases}\tag{12}$$

也即 $\boldsymbol{F}_1(t)$ 的列满秩性代表了自治系统(12)中状态 $\boldsymbol{\phi}$ 的可观测性，下面分析系统(12)完全可观测的条件。

根据 $\boldsymbol{A}_{\phi\phi}$、$\boldsymbol{A}_{V\phi}$ 的具体形式可得：

$$O(\boldsymbol{A}_{\phi\phi})\ll O(\boldsymbol{A}_{V\phi}),\ O(\boldsymbol{A}_{\phi\phi}^{(i)})\ll O(\boldsymbol{A}_{V\phi}),$$
$$i=1,2,\cdots,n-1\tag{13}$$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

因此可以近似认为：

$$\boldsymbol{F}_1(t)\approx\tilde{\boldsymbol{F}}_1(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{V\phi}(t)\\ \dot{\boldsymbol{A}}_{V\phi}(t)\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}^{(n-1)}{}_{V\phi}(t)\end{bmatrix}\tag{14}$$

可见，如果能够设计运动轨迹使得矩阵 $\tilde{\boldsymbol{F}}_1(t)$ 列满秩，且没有大的条件数，则忽略的数量级很小的量是不会影响矩阵 $\boldsymbol{F}_1(t)$ 的列满秩性的，此时矩阵 $\boldsymbol{F}_1(t)$ 肯定是列满秩的。关于矩阵 $\tilde{\boldsymbol{F}}_1(t)$ 的列满秩性有以下定理成立。

定理 3 当 $f_U(t^*)\neq 0$ 并且下列条件之一成立时，矩阵 $\tilde{\boldsymbol{F}}_1(t^*)$ 列满秩

1) $f_U(t^*)\dot{f}_W(t^*)\neq\dot{f}_U(t^*)f_W(t^*)$，

2) $f_U(t^*)\dot{f}_N(t^*)\neq\dot{f}_U(t^*)f_N(t^*)$，

3) $f_N(t^*)\dot{f}_W(t^*)\neq\dot{f}_N(t^*)f_W(t^*)$。

证明 由 $\boldsymbol{A}_{V\phi}$ 的具体形式可知，当 $f_U(t^*)\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}_{V\phi}$ 行等价于下面矩阵：

$$\begin{bmatrix}0 & -f_U(t^*) & f_W(t^*)\\ f_U(t^*) & 0 & -f_N(t^*)\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{V\phi}(t^*)\\ \dot{\boldsymbol{A}}_{V\phi}(t^*)\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}0 & -f_U(t^*) & f_W(t^*)\\ f_U(t^*) & 0 & -f_N(t^*)\\ 0 & -\dot{f}_U(t^*) & \dot{f}_W(t^*)\\ \dot{f}_U(t^*) & 0 & -\dot{f}_N(t^*)\\ -\dot{f}_W(t^*) & \dot{f}_N(t^*) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\tag{15}$$

其中“≅”代表矩阵等价。如果条件 1)成立，则上面矩阵第 1、2、3 行组成的子矩阵列满秩，如果条件 2)成立，则上面矩阵第 1、2、4 行组成的子矩阵列满秩，如果条件 3)成立，则上面矩阵第 1、2、5 行组成的子矩阵列满秩，因此，只要条件 1)、2)、3)之一成立，则矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{V\phi}(t^*)\\ \dot{\boldsymbol{A}}_{V\phi}(t^*)\end{bmatrix}$，从而 $\tilde{\boldsymbol{F}}_1(t^*)$ 列满秩。

注 2：以上结论可以作为设计运动轨迹的参考原则，由于设计地面运动时，一般有 $f_U\equiv g$，因此，只需设计运动使得 $-\dot{f}_N\neq 0$ 或者 $\dot{f}_W\neq 0$ 即可保证矩阵 $\tilde{\boldsymbol{F}}_1(t^*)$ 列满秩的条件。

下面讨论矩阵 $\boldsymbol{F}_2(t)$ 列满秩的条件，有如下定理成立。

定理 4 矩阵 $\boldsymbol{F}_2(t)$ 列满秩的充要条件是 $\dot{a}_i(t^*),\ddot{a}_i(t^*),\cdots,a_i^{(n-1)}(t^*)$ 不同时为零，其中 $a_i(t^*)$ 是 i 加速度计所感受的加速度 $(i=x,y,z)$。

证明： 由式(10)知，$\boldsymbol{N}_{i2}(t)=\boldsymbol{J}_a^{(i)}$，$i=0,\cdots,n-1$，又由于 $\boldsymbol{J}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_b^p & \boldsymbol{C}_b^p\boldsymbol{D}_a\end{bmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{J}_a^{(i)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_b^{p(i)} & \sum_{j=0}^{i}\dfrac{i(i-1)\cdots(i-j+1)}{j!}\boldsymbol{C}_b^{p(j)}\boldsymbol{D}_a^{(i-j)}\end{bmatrix}$$

则：

$$\boldsymbol{F}_2(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_b^p & \boldsymbol{C}_b^p\boldsymbol{D}_a\\ \dot{\boldsymbol{C}}_b^p & \dot{\boldsymbol{C}}_b^p\boldsymbol{D}_a+\boldsymbol{C}_b^p\dot{\boldsymbol{D}}_a\\ \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_b^{p(n-1)} & \sum_{j=0}^{n-1}\dfrac{(n-1)\cdots(n-j)}{j!}\boldsymbol{C}_b^{p(j)}\boldsymbol{D}_a^{(n-1-j)}\end{bmatrix},$$

所以矩阵 $\boldsymbol{F}_2(t)$ 行等价于矩阵 $\bar{\boldsymbol{F}}_2(t)$：

$$\boldsymbol{F}_2(t)\cong\bar{\boldsymbol{F}}_2(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}_a\\ 0 & \dot{\boldsymbol{D}}_a\\ \vdots & \vdots\\ 0 & \boldsymbol{D}_a^{(n-1)}\end{bmatrix}$$

记 $\tilde{\boldsymbol{F}}_2(t)=\begin{bmatrix}\dot{D}_a & \cdots & D_a^{(n-1)}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{F}_2(t^*)$ 列满秩 $\Leftrightarrow$ $\bar{\boldsymbol{F}}_2(t^*)$ 列满秩 $\Leftrightarrow$ $\tilde{\boldsymbol{F}}_2(t^*)$ 列满秩，又由于 $\boldsymbol{D}_a=\mathrm{diag}(a_x,a_y,a_z)$，所以 $\tilde{\boldsymbol{F}}_2(t^*)$ 列满秩 $\Leftrightarrow$ $\dot{a}_i(t^*),\ddot{a}_i(t^*),\cdots,a_i^{(n-1)}(t^*)$ 不同时为零$(i=x,y,z)$。

下面研究矩阵 $\boldsymbol{F}_3(t)$ 的列满秩性，由式(10)给出的递推关系可知，矩阵 $\boldsymbol{F}_3(t)$ 中的子矩阵 $\boldsymbol{N}_{i+1,3}(t)$ 不但与 $\boldsymbol{N}_{i,3}(t)$ 有关，还与 $\boldsymbol{F}_1(t)$ 的子矩阵 $\boldsymbol{N}_{i,1}(t)$ 有关，因此，直接给出矩阵 $\boldsymbol{F}_3(t)$ 列满秩的条件比较困难。矩阵 $\boldsymbol{F}_3(t)$ 是待估计误差参数 $[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{b\mathrm{T}}\quad\delta\boldsymbol{K}_g{}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 与系统观测量 $\bar{\boldsymbol{Y}}$ 之间的转换系数矩阵，因此矩阵 $\boldsymbol{F}_3(t)$ 的列满秩性反映了误差参数 $[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{b\mathrm{T}}\quad\delta\boldsymbol{K}_g{}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 的可估计性，而关于误差参数 $[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{b\mathrm{T}}\quad\delta\boldsymbol{K}_g{}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 的可估计性，根据方程(2)易得如下的必要条件。

定理 5 与陀螺相关的误差参数 $[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{b}\mathrm{T}}\quad\delta\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}{}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 可估计的必要条件是

$$\exists t^*,\ \mathrm{s.t}\quad\dot{\omega}_i(t^*)\neq 0,\quad i=x,y,z.$$

证明： 仅对 $i=x$ 来证明，$i=y,z$ 时同理证得。

用反证法，如果条件不成立，即对于所有的 t，都有 $\dot{\omega}_x(t)=0$，那么 $\omega_x(t)\equiv\mathrm{const}$，由陀螺测量误差方程(2)可知：

$$\varepsilon_x^{\mathrm{b}}=\bar{\varepsilon}_x+\omega_x\delta k_{gx}$$

此时，$\bar{\varepsilon}_x$ 和 $\omega_x\delta k_{gx}$ 的贡献都是一个常值误差，即此时

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

标度因数误差 δk_{gx} 给系统带来的误差与常值零偏 $\bar{\varepsilon}_x$ 是等效的，所以使用任何标定算法都不可能分别估计出 $\bar{\varepsilon}_x$ 和 δk_{gx}，因此，要使得陀螺零偏和标度因数误差都是可估计的，设计的标定实验必须满足条件 $\dot{\omega}_x(t^*)\neq 0\ (\exists t^*)$。

综合定理 3、4、5 的条件，可以归纳设计外场动态轨迹时的参考原则如下：

c1. 存在 t^*，使得下列条件之一成立：

1) $f_U(t^*)\dot{f}_W(t^*)\neq \dot{f}_U(t^*)f_W(t^*)$，

2) $f_U(t^*)\dot{f}_N(t^*)\neq \dot{f}_U(t^*)f_N(t^*)$，

3) $f_N(t^*)\dot{f}_W(t^*)\neq \dot{f}_N(t^*)f_W(t^*)$。

c2. 存在 t^*，使得 $\dot{a}_i(t^*),\ddot{a}_i(t^*),\cdots,a_i^{(n-1)}(t^*)$ 不同时为零，$i=x,y,z$。

c3. 存在 t^*，使得 $\dot{\omega}_i(t^*)\neq 0,\ \ i=x,y,z$。

注 3：根据条件 c1～c3，可以很直观地判断一些常见运动下系统是否为完全可观测的，比如匀速直线运动、匀加速直线运动以及平面内的匀速圆周运动条件下系统都是不完全可观测的。

注 4：矩阵 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 列满秩只是可观测矩阵 $\boldsymbol{F}$ 列满秩的必要而非充分条件，因此，上面的这些条件只是作为设计动态标定路径的指导，当设计出运动轨迹后，必须计算出相应的可观测矩阵 $\boldsymbol{F}$，并且验证它的列满秩性之后才能判断系统是否完全可观测。

下一节将给出一种可行的动态标定路径设计，并给出 Matlab 仿真实验结果。

4　一种可行的路径设计及仿真

根据第 3 节系统的可观性分析结果，可以设计出多种满足系统完全可观测的运动路径，下面给出一种设计，并给出仿真结果。

分两段设计，在 $t_0\sim t_1$ 时间段，载体做北向匀加速直线运动，这段运动的目的是为了给载体一个初始线速度 v_0，在 $t_1\sim t_2$ 时间段，设计运动如下：

线运动：

$$V_N(t)=v_0\cos\omega_v(t-t_1),\ V_W(t)=v_0\sin\omega_v(t-t_1),\ V_U(t)\equiv 0;$$

角运动：

$$\theta(t)\equiv 0^\circ,\ \psi(t)\equiv-\psi_1\cos\omega_\psi(t-t_1),\ \gamma(t)=-\gamma_1\cos\omega_\gamma(t-t_1)\ 。$$

该运动实现的是载体做速度为 v_0 的匀速圆周线运动的同时做滚动角和偏航角的角运动，其中 ω_v 为匀速圆周动的角速率，ψ_1 为偏航角运动的最大角度，ω_ψ 为偏航角运动的变化频率，γ_1 为滚动角运动的最大滚动角，ω_γ 为滚动角运动的变化频率。

根据式(10)计算出矩阵 $\boldsymbol{F}(t)$，取 $t^*=20$，$v_0=30$ m/s $\psi_1=\dfrac{\pi}{2}$，$\omega_\psi=\dfrac{\pi}{20}$，$\gamma_1=\dfrac{\pi}{3}$，$\omega_\gamma=\dfrac{\pi}{20}$，有

$$\operatorname{rank}\left[\boldsymbol{F}_0^{\mathrm{T}}(t^*)\quad \boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}(t^*)\quad\cdots\quad \boldsymbol{F}_4^{\mathrm{T}}(t^*)\right]^{\mathrm{T}}=15,$$

即在该运动下矩阵 $\boldsymbol{F}(t^*)$ 是列满秩的，所以在该运动下系统(9)是完全可观测的，从而系统(3)是完全可观测的，下面给出对系统(3)的卡尔曼滤波仿真结果。

仿真条件：

加速度计零偏为 $\bar{\nabla}_x=\bar{\nabla}_y=\bar{\nabla}_z=1\times10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$，标度因数误差为 1×10^{-4}，量测白噪声强度为 $1\times10^{-5}\ \mathrm{m/s^2}$，陀螺的零偏为 $\bar{\varepsilon}_x=\bar{\varepsilon}_y=\bar{\varepsilon}_z=2.4\times10^{-7}$ rad/s，陀螺标度因数误差 $\delta K_{gx}=\delta K_{gy}=\delta K_{gz}=1\times10^{-5}$，陀螺量测白噪声强度为 2.4×10^{-8} rad/s；时刻 $t_0=0$ s，$t_1=10$ s，$t_2=200$ s，卡尔曼滤波的仿真曲线如图 1 所示，各仿真曲线说明，系统状态 $\boldsymbol{\phi}$、$\bar{\boldsymbol{\nabla}}^{\mathrm{b}}$、$\delta\boldsymbol{K}_{\mathrm{a}}$、$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{b}}$、$\delta\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}$ 经过一段时间后均收敛到了真值。

对惯组各误差参数，用 100 ~ 200 s 的估计值的平均值来作为该次实验误差参数的估计值，考虑到惯性仪表随机噪声的影响，重复做上面仿真实验 10 次，取 10 次实验计算结果的平均值作为误差参数的估计值，结果如下：

$$\tilde{\bar{\boldsymbol{\nabla}}}^{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix}0.9926\\0.9981\\1.0163\end{bmatrix}\times10^{-3},\quad \delta\tilde{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{a}}=\begin{bmatrix}1.0163\\1.0237\\1.0035\end{bmatrix}\times10^{-4},$$

$$\tilde{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix}2.3840\\2.4193\\2.3401\end{bmatrix}\times10^{-7},\quad \delta\tilde{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{g}}=\begin{bmatrix}1.0057\\1.0614\\0.9533\end{bmatrix}\times10^{-5}\qquad(16)$$

各误差参数的相对估计精度为：

$$\frac{\left|\tilde{\bar{\boldsymbol{\nabla}}}^{\mathrm{b}}-1\times10^{-3}\right|}{1\times10^{-3}}=\begin{bmatrix}0.74\%\\0.19\%\\1.63\%\end{bmatrix},\quad \frac{\left|\delta\tilde{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{a}}-1\times10^{-4}\right|}{1\times10^{-4}}=\begin{bmatrix}1.63\%\\2.37\%\\0.35\%\end{bmatrix},$$

$$\frac{\left|\tilde{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{b}\text{-}2.4\times10^{-7}\right|}{2.4\times10^{-7}}=\begin{bmatrix}0.67\%\\0.80\%\\2.50\%\end{bmatrix},\quad \frac{\left|\delta\tilde{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{g}}-1\times10^{-5}\right|}{1\times10^{-5}}=\begin{bmatrix}0.57\%\\6.14\%\\4.67\%\end{bmatrix}\qquad(17)$$

即陀螺零偏的估计误差在设定值的 3%以内，陀螺标度因数误差的估计误差在设定值的 7%以内，加表零偏的估计误差在设定值的 2%以内，加表标度因数误差的估计误差在设定值的 3%以内。

以上仿真结果说明，在该运动路径下，惯组的 12 个误差参数都是完全可估计的，并且估计精度高。

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

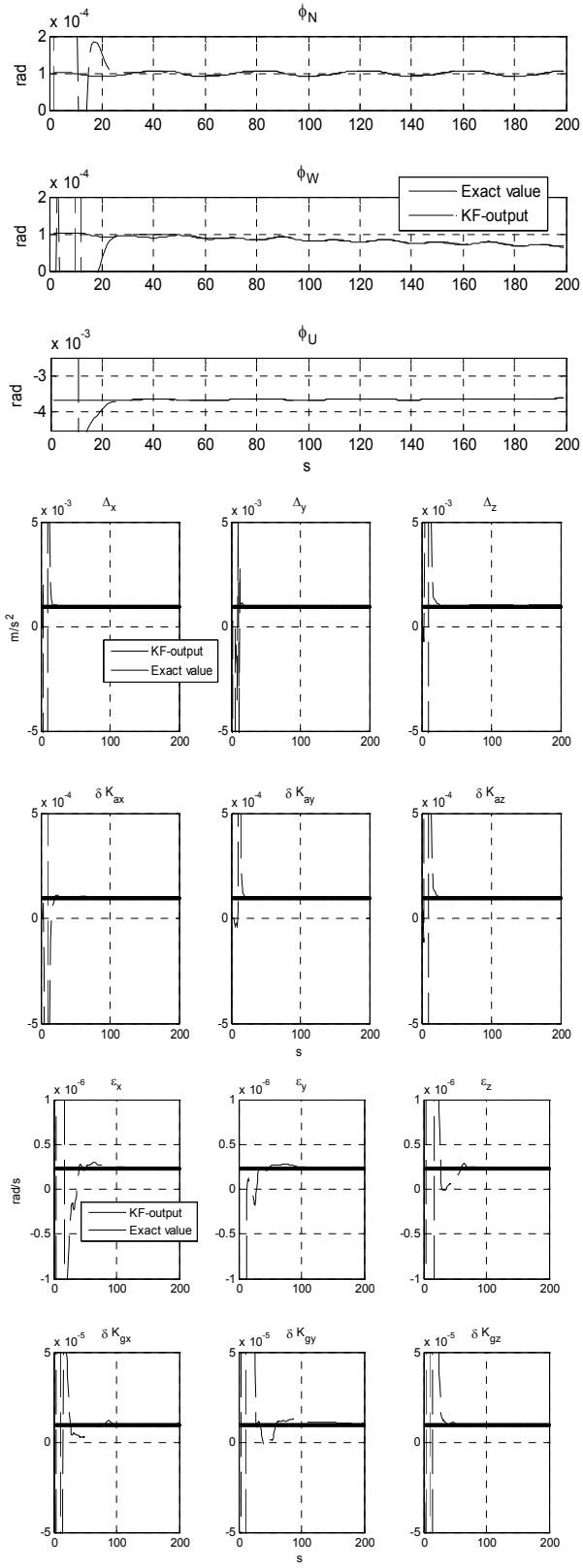

图 1 卡尔曼滤波仿真曲线

Fig.1 Simulating curves of Kalman filtering

5 小 结

本文讨论了激光捷联惯性导航系统在动态时的 12 个误差参数 (陀螺零偏，陀螺标度因数误差，加速度计零偏，加速度计标度因数误差)的标定问题。首先根据一般形式的线性时变系统可观测性判据，分析了设计外场动态轨迹时必须遵循的原则，设计了一种可行的运动方式，使得系统在此运动下惯组的 12 个误差参数都是可以估计的，最后进行了仿真验证，结果表明，该运动方式下，系统的 12 个误差参数都能够得到估计，而且估计精度高。

由于在实际的外场实验中是采用 GPS 或测速仪来提供基准的位置和速度信息的，而它们本身就存在着测量误差和测量噪声，因此下一步将研究系统基准信息存在的误差和噪声对标定精度的影响。

致谢: 感谢中国科学院数学与系统科学研究院黄一研究员对本文工作的指导。

参考文献（References）：

[1] 杨晓霞，黄一. 外场标定条件下捷联惯导系统误差状态可观测性分析[J]. 中国惯性技术学报，2008，16(6)：551-558.
YANG Xiao-xia, HUANG Yi. Observability analysis for error states of SINS under outer field conditions[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(6): 551-558.

[2] 杨晓霞，黄一. 利用 ESO 和 TD 进行的激光接连惯组误差参数外场标定方法[J]. 中国惯性技术学报，2010，18(1)：1-10.
YANG Xiao-xia, HUANG Yi. Application of ESO and TD to outer field calibration of laser gyro SINS[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2010, 18(1): 1-10.

[3] 冯绍军，袁信. 观测度及其在卡尔曼滤波器设计中的应用[J]. 中国惯性技术学报，1999，7(2)：18-21.
FENG Shao-jun, YUAN Xin. Observability and its application in Kalman Filter Design[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 1999, 7(2): 18-21.

[4] 程向红，万德钧，仲巡. 捷联惯导系统的可观测性和可观测度研究[J]. 东南大学学报，1997，27(6)：6-11.
CHEND Xiang-hong, WAN De-jun, ZHONG Xun. Study on observability and its degree of strapdown inertial navigation system[J]. Journal of southeast university, 1997, 27(6): 6-11.

[5] 崔鹏程，邱宏波. 舰载导弹用捷联惯导系统校准技术研究[J]. 中国惯性技术学报，2007，15(1)：12-15.
CUI Peng-cheng, QIU Hong-bo. Calibration technique for shipboard missile SINS[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2007, 15(1): 12-15.

[6] Goshen-Meskin D, Bar-Itzhack I Y. Unified approach to inertial navigation system error modeling[J]. Journal of Guidance and Dynamics, 1992, 15(3): 648-653.

[7] Goshen-Meskin D, Bar-Itzhack I Y. Observability analysis of piece-wise constant systems, Part I: Theory[J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1992, 28(4): 1056-1067.

[8] Friedland B. On the calibration problem[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, 22(6): 899-905.

[9] Wang Xinlong, Guo Longhua. An intelligentized and fast calibration method of SINS on moving base for planed missiles[J]. Aerospace Science and Technology, 2009, 13(4): 216-223.

[10] Qasem H, Gorgis O, Reindl L. Design and calibration of an inertial sensor system for precise vehicle navigation[C]// 5th Workshop on Positioning, Navigation and Communication. 2008: 229-231.

[11] Wang Xinlong, Shen Gongxun. A fast and accurate initial alignment method for strapdown inertial navigation system on stationary base[J]. Journal of Control Theory and Applications, 2005, 3(2): 145-149.

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net