

DOI : 10.3901/JME.2019.21.051

基于工作空间分析的 9 自由度超冗余串联机械臂构型优化*

赵智远^{1,2} 徐振邦¹ 何俊培^{1,2} 贺 帅¹ 徐 策^{1,2}

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所 长春 130033 ;

2. 中国科学院大学 北京 100049)

摘要：提出基于工作空间分析解决超冗余串联机械臂构型选择问题的方法。首先，采用正态分布对求取机器人工作空间的蒙特卡洛法进行改进。用归一化可操作度指标分析机械臂运动的灵活性，用数值仿真的方法得到了最大可操作度值与随机关节角组合的数量之间的关系，提出求取灵活工作空间的算法。其次，基于得到的工作空间，提出一种体元化算法求取工作空间的体积，寻找到工作空间的边界部分和非边界部分，通过对边界部分的不断细化，降低了体积求取误差。然后，分析多自由度串联机械臂构型设计方法，针对 9 自由度超冗余串联机械臂，确定出了 36 种待选择的构型方案。仿真分析 9 自由度超冗余串联机械臂的工作空间，在待选构型中选取了一组最优构型。结果表明：改进的蒙特卡洛法生成了精确的工作空间；体积求取算法效率较高，相对误差小于 1%；所选构型的工作空间指标优于已研制的构型，其中可达工作空间体积提高了 26.49%，灵活工作空间体积提高了 36.63%。

关键词：机械臂；工作空间；蒙特卡洛法；体元化；构型

中图分类号：TP242

Configuration Optimization of Nine Degree of Freedom Super-redundant Serial Manipulator Based on Workspace Analysis

ZHAO Zhiyuan^{1,2} XU Zhenbang¹ HE Junpei^{1,2} HE Shuai¹ XU Ce^{1,2}

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics,
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract : A method to solve the problem of configuration selection of super-redundant serial manipulators based on the workspace analysis is proposed. The Monte Carlo method for the robot workspace is improved using normal distribution. The normalized maneuverability index is used to analyze the flexibility of the manipulator's movement. The relationship between the maximum manipulability value and the number of random joint angle combinations is obtained by numerical simulation, and an algorithm to obtain a flexible workspace is proposed. Based on the obtained workspace, a voxelization algorithm is proposed to obtain the volume of the workspace, and the boundary and non-boundary parts of the workspace are found. Through the refinement of the boundary part, the volumetric error is reduced. A multivariant serials manipulator configuration design method is analyzed. For the nine-degree-of-freedom super-redundant series manipulator, 36 kinds of configuration schemes to be selected are determined. The workspace of the nine-degree-of-freedom super-redundant series manipulator is simulated and analyzed, and a set of optimal configurations is selected in the candidate configuration. The results show that the improved Monte Carlo method generates accurate workspace; the volume extraction algorithm has high efficiency and the relative error is less than 1%; the workspace index of the selected configuration is better than the configuration developed by this research group. Reachable workspace volume increases by 26.49% and flexible workspace volume increases by 36.63%.

Key words : robotic arm ; workspace ; Monte Carlo method ; voxel ; configuration

* 国家自然科学基金(11672290)和吉林省科技发展(20160520074JH)资助项目。20181102 收到初稿，20190626 收到修改稿

0 前言

冗余自由度机器人是由机构、控制系统和驱动系统三部分组成。其中控制系统的研究占了绝大部分,而机构和驱动系统的研究则相对较少。但是,冗余自由度机器人的构型决定了机器人是否存在封闭式的逆解,机器人是否具有灵活操作的能力以适应不同的作业环境等诸多特性,因此构型研究也是冗余自由度机器人研究与应用的一个重要方面。为了能从众多的构型方案中选取一组最优的构型方案,许多学者对此展开了研究。2006 年,周玉林等^[1]研究了仿人机器人的构型,在多自由度关节处引入并联机构,采用等效机构替代关节及组合的方法,构建了最优的人形机器人的构型。2013 年,赵京等^[2]基于人体工程学确定出了串联方式下的最佳仿人机械臂构型。2017 年,孟得山等^[3]为提高柔性关节机械臂的头部碰撞安全性,基于机械臂安全指数和梯度投影法,提出了柔性关节机械臂构型优化的方法。

机械臂的工作空间是重要的设计指标,可用来评价机械臂的各种构型方案。工作空间包括可达工作空间(Reachable workspace)和灵巧工作空间(Dexterous workspace)。灵巧工作空间是机器人能以任意姿态到达的所有位置的集合,是可达工作空间的子集,由于结构参数和关节角运动范围的限制,实际使用的机器人其灵巧工作空间是不存在的^[4]。灵活工作空间(Flexible workspace)是灵巧工作空间的近似,可用于机器人构型的优化。

灵活工作空间是机器人能以尽可能多的姿态到达的所有位置的集合,是可达工作空间的子集。目前文献中经常采用逆运动学验证给定位姿是否有解的思想分析机器人的灵活工作空间,这种方法将可达工作空间离散成不同位置,接着给每个位置离散尽可能多的姿态,然后对每个位置每种姿态进行逆运动学求解,最后把大多数姿态都有逆解的位置集合起来得到灵活工作空间^[5-7]。这种方法适用于具有解析式逆解的机器人的灵活工作空间求取,对于只能采用数值法求逆解的机器人不适用,因此该方法不具有通用性。

在求解机器人工作空间的众多方法当中,蒙特卡洛法是使用最为广泛的一种数值方法,但是该方法存在如下问题。

(1) 应用蒙特卡洛法求得的机器人工作空间的精确度依赖于随机采样点的数量,当采样点数量不足时,不能生成精确的工作空间,生成的工作空间

的边界“噪声”很大,不光滑。通过不断增加随机采样点的数量,虽然可以改善工作空间边界处点不足的情况,但是大多数的点依旧出现在非工作空间边界的部位,导致点的浪费^[8-9]。

(2) 机器人正向运动学方程中的坐标变换方程是非线性的,用蒙特卡洛法取得的关节角角度值服从均匀分布,经过关节空间到操作空间的映射后,得到的工作空间点在整个工作空间中的分布就不再满足均匀分布^[10]。会出现有些地方点云密度大,有些地方点云密度小的问题。而且点云密度小的地方往往出现在工作空间边界的位置,导致不能生成精确的工作空间边界。与此同时,点云密度大的地方,出现“冗余”的情况,严重浪费了计算资源。

(3) 用蒙特卡洛法求得的机器人工作空间,由于精确度不高,导致下一步求得的体积误差较大,不利于机器人构型的优化设计。

工作空间表示机器人活动空间的范围,其大小可以用体积来衡量。精确求得工作空间的体积对于机器人构型优化具有重要意义。目前求体积一般都采用先求工作空间的边界,再用数值积分法求体积的方法^[11]。然而该方法存在曲线和曲面拟合过程复杂,精度不易控制的缺点^[12]。

文中研究了 9 自由度超冗余串联机械臂的构型方案优化问题,提出了基于工作空间分析的解决方法。首先,对求取工作空间的蒙特卡洛法进行改进,改进的过程包含两个阶段。第一阶段,用传统蒙特卡洛法生成种子工作空间。第二阶段,基于正态分布抽样对种子工作空间扩展,通过在扩展的过程中设定一个精度阈值,确保得到的工作空间中每个位置都能被准确地描述。其次,分析了评价机器人运动灵活性的指标,采用归一化的可操作度指标衡量机器人运动的灵活性。用数值仿真的方法分析了整个可达工作空间内部最大可操作度值与随机取样的关节角组合的数量之间的关系,提出了求取灵活工作空间的算法。接着,针对采用改进蒙特卡洛法得到的工作空间,提出一种体元化算法求取工作空间的体积。为了提高计算结果精度的同时保证有较高的计算效率,将工作空间分为两个部分,设计了寻找边界和非边界的算法,寻找到工作空间的边界部分和非边界部分,通过只对边界部分的不断细化,减少了计算时间,提高了结果精度。然后,分析了多自由度串联机械臂构型设计方法,针对九自由度超冗余串联机械臂,通过“选位”和“选型”两个步骤,确定出了 36 种待选择的构型方案。最后,将可达工作空间体积、灵活工作空间体积和 SLI 指标作为三个指标综合评价机器人的工作空间,仿真分

析了本课题组研制的九自由度超冗余串联机械臂和 36 种待选择构型方案的工作空间,在 36 种方案中确定出一组最优的构型方案,为了验证提出的构型选择方法的合理性,对比分析了所选构型与课题组研制的 9 自由度超冗余串联机械臂的三个评价指标。

1 9 自由度超冗余串联机械臂

1.1 9 自由度超冗余串联机械臂

为了更好地执行空间在轨服务任务,本课题组研制了面向空间的 9 自由度超冗余串联机械臂,如图 1 所示,该机械臂由一种大输出力矩、大减速比、小关节长度的机械臂关节组成,具有结构紧凑、负载大以及结构互换性好等特点^[13]。

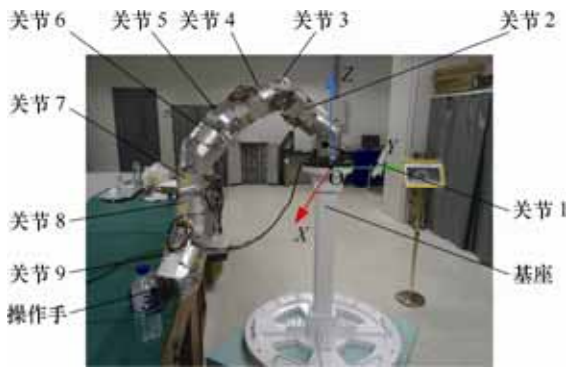


图 1 9 自由度超冗余串联机械臂

两个关节之间通过连接板和关节连接轴连接在一起,相邻关节的关节轴线互相垂直,如图 2 所示。



图 2 关节连接方式

9 自由度超冗余串联机械臂的九个关节属于模块化关节,具有适应性强、可靠性高、经济性好以及具有可扩展性等优点。单关节的主要参数如表 1 所示。

表 1 单关节参数

半径/mm	臂长/mm	质量/kg	转角范围/(°)	输出力矩/(N·m)
68.5	165.5	3.4	[-90,90]	180

1.2 运动学模型

机器人的正向运动学是指在给定所有关节位置 and 所有连杆几何参数的情况下,求取末端相对于基座的位置和姿态。采用修改后的 D-H 法建立机器人连杆坐标系,如图 3 所示。

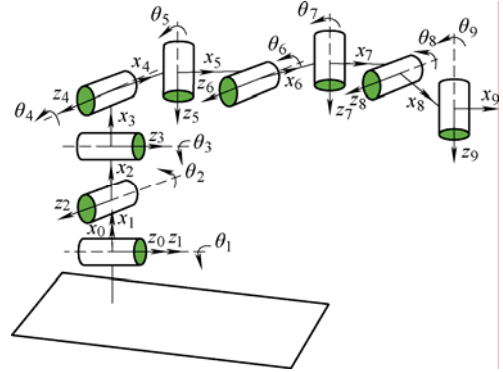


图 3 9 自由度超冗余串联机械臂连杆坐标系

相应的 D-H 参数如表 2 所示,推导出正向运动学方程。

表 2 9 自由度超冗余串联机械臂 D-H 参数

连杆编号	a_{i-1}/mm	d_i/mm	$\alpha_{i-1}/(^{\circ})$	$\theta_i/(^{\circ})$	关节角范围/(°)
1	0	0	0	θ_1	[-90,90]
2	165.5	0	-90	θ_2	[-90,90]
3	165.5	0	90	θ_3	[-90,90]
4	165.5	0	-90	θ_4	[-90,90]
5	165.5	0	90	θ_5	[-90,90]
6	165.5	0	-90	θ_6	[-90,90]
7	165.5	0	90	θ_7	[-90,90]
8	165.5	0	-90	θ_8	[-90,90]
9	165.5	0	90	θ_9	[-90,90]

相邻关节坐标系 $i-1$ 和 i 之间的位姿变换矩阵为

$${}^{i-1}_i T = \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中, $c\theta_i = \cos\theta_i$, $s\theta_i = \sin\theta_i$, $c\alpha_{i-1} = \cos\alpha_{i-1}$, $s\alpha_{i-1} = \sin\alpha_{i-1}$ 。

机械臂末端执行器的正向运动学方程为

$${}^0_9 T = {}^0_1 T \cdot {}^1_2 T \cdot {}^2_3 T \cdot {}^3_4 T \cdot {}^4_5 T \cdot {}^5_6 T \cdot {}^6_7 T \cdot {}^7_8 T \cdot {}^8_9 T = \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$P = (P_x \ P_y \ P_z)^T \quad (3)$$

式中, R 为末端执行器相对基坐标的姿态矩阵; P 为末端执行器相对基坐标系的位置矢量。

2 工作空间分析

2.1 改进的蒙特卡洛法

改进的蒙特卡洛法分为两个阶段,第1阶段生成种子工作空间,第2阶段对种子工作空间进行加密和扩展。

2.1.1 生成种子工作空间

用传统的蒙特卡洛法分别对每个关节变量随机取得 N_1 个值,结合正向运动学方程得到机器人的工作空间。工作空间中包含 N_1 个点,求得这些点在三个坐标轴方向的最大值和最小值,即 $X_{\max}, Y_{\max}, Z_{\max}$ 和 $X_{\min}, Y_{\min}, Z_{\min}$ 。为了准备第2阶段种子工作空间的加密和扩展,进行如下步骤。

第(1)步:用长方体包络种子工作空间。生成的种子工作空间小于实际的工作空间,为了方便第2阶段的加密和扩展,沿着每一个坐标轴方向增加一个余量 Δ ,即用一个比种子工作空间大的长方体将种子工作空间包络起来。此时长方体的顶点坐标为 $(X_{\min} - \frac{\Delta}{2}, Y_{\min} - \frac{\Delta}{2}, Z_{\min} - \frac{\Delta}{2})$,长方体的长、宽和高如下所示。

$$\Delta = \frac{(|X_{\max} - X_{\min}| + |Y_{\max} - Y_{\min}| + |Z_{\max} - Z_{\min}|)}{12} \quad (4)$$

$$l = |X_{\max} - X_{\min}| + \Delta \quad (5)$$

$$w = |Y_{\max} - Y_{\min}| + \Delta \quad (6)$$

$$z = |Z_{\max} - Z_{\min}| + \Delta \quad (7)$$

式中, l, w, h 分别代表长方体的长、宽和高。

第(2)步:分割长方体。沿着坐标轴 X, Y, Z 轴方向将第1步中生成的长方体分别分割为 n_x, n_y, n_z 个等间距的部分。此时长方体被分割为 $k = n_x \times n_y \times n_z$ 个小长方体。逐层对每个小长方体进行编号,编号规则如图4所示,然后逐一搜索落入每个小长方体中的工作空间点的数量。在第2阶段加密及扩展种子

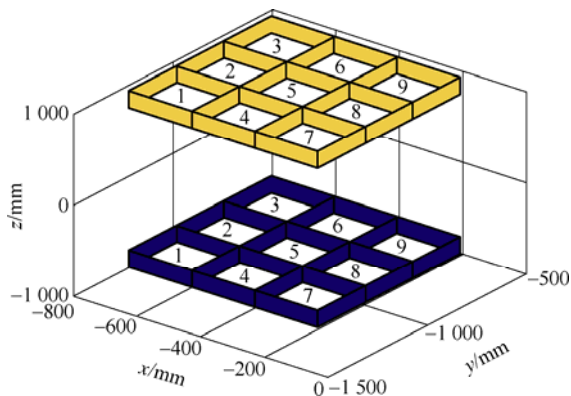


图4 编号示意图

工作空间的工程中,为了确保工作空间中每个位置都能被准确地描述,设定一个精度阈值 N_{goal} 。

第(3)步:建立数据库 $Database_1$,将包含工作空间点数量小于 N_{goal} 的小长方体对应的编号存入该数据库中。每个小长方体中包含的工作空间点的数量记为 $N_c (c = m, \dots, n)$,其中 $(1 \leq m, n \leq k)$ 。

第(4)步:建立数据库 $Database_2$,找到落入数据库 $Database_1$ 中每个小长方体里面的工作空间点,将产生这些点的关节角的组合存入该数据库中。

2.1.2 种子工作空间扩展

通过算法1的流程对种子工作空间进行扩展。

算法1:控制精度增长种子工作空间

Given: $Database_1, Database_2, \sigma, \delta, N_{\text{goal}}, n_f^{\max}$

```

1 while Database_1 is not empty do
2   for c=m,...,n do
3      $P^0 \leftarrow$  workspace point randomly picked among in  $S_c$ 
4      $q^0 \leftarrow$  vector of joint coordinates that generated  $P^0$ 
5      $n_f \leftarrow 0$ 
6     for i=1,...,  $n_c$  do
7        $n_c \leftarrow |N_{\text{goal}} - N_c| (c = m, \dots, n)$ 
8        $q_i^* \leftarrow \text{Normal}(q_c^0, \sigma)$ 
9       if  $q_i^*$  satisfies joint limits then
10         $P_i^* \leftarrow$  solve the forward kinematic problem
11      else  $q_i^* \leftarrow \text{Normal}(q_c^0, \sigma)$ 
12        Database_1  $\leftarrow P_i^*$ 
13        Database_2  $\leftarrow q_i^*$ 
14      end if
15    end for
16  end for
17   $n_f \leftarrow n_f + 1$ 
18  if  $n_f > n_f^{\max}$  then
19     $n_f \leftarrow 0$ 
20     $\sigma \leftarrow \sigma / \delta$ 
21  end if
22 end while

```

数据库 $Database_1$ 中存放着待加密和扩展的小长方体,逐层按照编号顺序对每一个小长方体进行加密,对应每个小长方体需要加密的次数为 $n_c = |N_{\text{goal}} - N_c| (c = m, \dots, n)$ 。对于待加密的小长方体 S_c ,在其包含的所有工作空间点中随机选取一个点 P^0 (第3行),然后在数据库 $Database_2$ 中找到产生该点的关节角组合 q^0 (第4行)。将 q^0 作为正态分布函数的均值,给定一个标准差 σ ,利用正态分布函数在关节角 q^0 附近随机取值,取值次数为

$n_c = |N_{\text{goal}} - N_c|$ ($c = m, \dots, n$)。每次取值得到一个新的关节角组合 q_i^* ，判断其是否在对应该关节角的取值范围内，如果是保留该次取值，反之舍弃后重新取值(第 6, 7, 8, 9, 11 行)。将新得到的 n_c 个关节角代入正向运动学方程，在 P^0 点附近产生 n_c 个新的工作空间点(第 10 行)。更新数据库 *Database_1* 和数据库 *Database_2* (第 12、13 行)。根据正态分布概率密度函数的特性，新产生的关节角 q_i^* 可能离 q^0 较远，经正向运动学方程映射到工作空间后，新的工作空间点也许没有落在 P^0 点所在的小长方体里面。但是由于产生该点的关节角满足关节角取值范围要求，所以新得到的点同样是工作空间的点，这些点落在正在加密的小长方体以外的小长方体中，保证了工作空间的扩展。正态分布的概率密度函数图像如图 5 所示， σ 越大，曲线越扁平； σ 越小，曲线越瘦高。本文中标准差 σ 是动态可调的，用 n_f 表示算法 1 加密 *Database_1* 中小长方体时连续失败的次数，当 n_f 大于设定的临界值 n_f^{max} 时，表示此时正态分布的标准差 σ 太大，通过除以一个调整数 δ ($\delta > 1$) 减小 σ ，每次调整完 σ 后， n_f 重置为 0 (第 17, 18, 19, 20 行)。当数据库 *Database_1* 中不再包含待加密的小长方体时，加密完成，此时得到的工作空间即为机器人实际的工作空间。

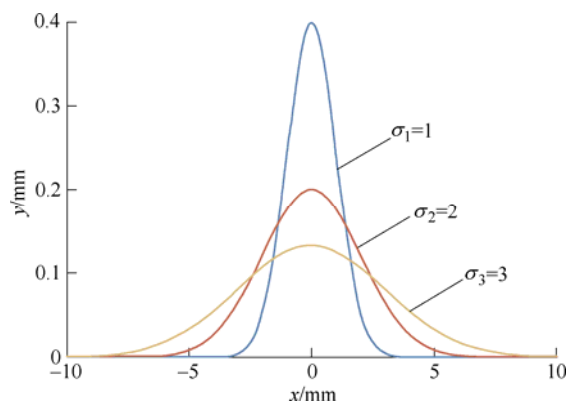


图 5 正态分布概率密度函数

2.2 灵活工作空间分析

文中为了求得机器人的灵活工作空间，首先需要分析机器人的运动灵活性。一个机器人操作系统可以看成由关节空间到全局操作空间的机械能量转换器，其运动灵活性反映了整个系统对运动的全局转化能力，也就是机器人在任意方向上的运动能力^[14]。分析运动灵活性的指标主要有可操作度、条件数和最小奇异值，TADOKORO 等^[15]研究表明可操作度指标优于条件数指标和最小奇异值指标，因为可操作度指标考虑了末端执行器在各个方向上运动的能力，而条件数和最小奇异值仅仅考虑了在

个别方向上的运动能力。

2.2.1 可操作度指标

对于一个具有 n 个自由度的超冗余机械臂，其运动学的微分方程为

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (8)$$

式中， $\dot{X}$ 表示机械臂末端位姿空间的速度； $\dot{q}$ 表示机械臂关节空间速度； J 为机器人的雅可比矩阵，表示机器人关节空间速度与操作臂末端位姿空间的速度之间的映射。

为了定量地描述机器人的运动灵活性，YOSHIKAWA^[16]定义了可操作度

$$\omega = \sqrt{\det(JJ^T)} = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m} \quad (9)$$

式中， λ_m 为矩阵 JJ^T 的特征值。

可操作度 ω 的物理意义可以解释为对某一位形下机器人往各个方向运动能力的综合度量，可以用来衡量机器人的整体灵活性。可操作度越大，机器人的运动灵活性就越好，可操作度为 0 表明机器人处于奇异位形^[17]。YOSHIKAWA^[18]提出了可操作度椭球的概念，该椭球在几何层面上更加清晰、形象地对机器人的运动灵活性进行了阐述。由可操作度椭球得到可操作度的几何意义为椭球各轴长的乘积，可操作度值的大小与可操作度椭球的体积成正比。

2.2.2 归一化可操作度指标

可操作度指标广泛用于机器人灵活性的测量，但是可操作度指标是一个有量纲的指标。在评价机器人运动性能过程中，往往希望得到量纲统一的指标，为此文献^[19]定义了归一化的可操作度指标 ω_n

$$\omega_n = \frac{\omega_i}{\max(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)} \quad (10)$$

式中， ω_i 为工作空间中给定点的可操作度值； $\max(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)$ 是整个工作空间中的最大可操作度值。

归一化的可操作度指标 ω_n 量纲为 1，取值范围在区间 $[0, 1]$ 之间， $\omega_n = 0$ 表示该点处于奇异位形； $\omega_n = 1$ 表示该点具有最好的运动性能。

对于一个给定的机器人，当结构参数已知时，机器人的关节变量便是唯一的自变量，当机器人在关节变量范围内运动时，根据可操作度指标的物理意义和几何意义得知在整个可达工作空间内，机器人的最大可操作度值是一个有上限的值。用数值仿真的方法分析可操作度值与随机选取的关节角组合的数量之间的关系，可以得到全局最大可操作度值以及取得该值时对应的关节角组合的数量。

机器人的构型不同其雅可比矩阵的解析式也不同,对同一种构型,雅可比矩阵又依赖于机器人的关节位形。以图 1 中的构型为例进行数值仿真,介绍了确定不同构型的全局最大可操作度值和取得此值时关节角组合的数量的方法,具体步骤如下。

第(1)步:采用改进的蒙特卡洛法求机械臂的可达工作空间,求得的工作空间中每一个点对应着一组姿态信息。设置一个尽可能大的精度阈值 N_{goal} ,使得到的工作空间每个位置都被准确描述,即机械臂运动过程中尽可能多的位形被考虑在内。

第(2)步:求得工作空间中所有点的可操作度值,即不同位形对应的可操作度值,然后求得全局最大可操作度值 ω_{max} 。

第(3)步:为了验证求得的 ω_{max} 是否取得最大值,增大第(1)步中的 N_{goal} ,即增加关节角组合的数量,重复第(1)、(2)步。将此时求得的 ω_{max} 与第(2)步的 ω_{max} 比较,如果大于,即第(2)步求得的 ω_{max} 已取得最大值,记录此时对应的关节角组合数量;否则继续增大 N_{goal} ,重复上述步骤。

如图 6 所示,横坐标表示关节角组合的数量,纵坐标表示计算出的可操作度值。由图可以看出,大部分时间可操作度值会随着关节角组合数量的增大而增大,只在接近最大可操作度值位置时,继续增加关节角组合数量,可操作度值会上下波动,二者之间的关系不再符合正相关。分析出现这种现象的原因,是因为采用蒙特卡洛法选取关节角组合具有随机性。如图 6 所示,对于该构型的 9 自由度超冗余机械臂,在点(6.845,8.112)处可以取得可操作度的最大值,得到该值需要的关节角组合的数量为 $10^{6.845}$ 个。

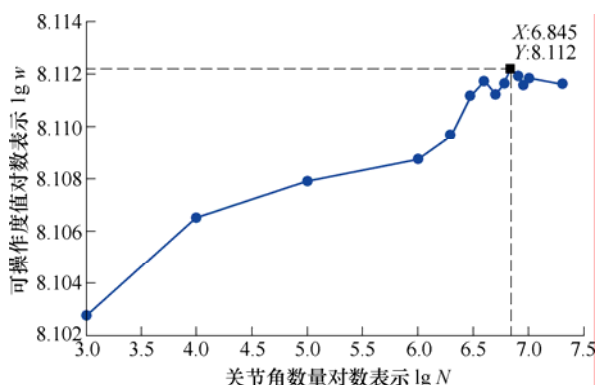


图 6 可操作度值与关节角数量之间的关系

2.2.3 灵活工作空间算法

用数值法分析机器人灵活性求取灵活工作空间时,关节角组合的数量不可能取到无穷大,为了尽可能得到准确的结果,提出了求取灵活工作空间的算法,该算法分为两个阶段,第一阶段生成种子工

作空间,第二阶段对种子工作空间进行扩展和加密。

第(1)步:首先用改进的蒙特卡洛法随机抽样,得到全局最大可操作度值 ω_{max} 以及取得该值时关节角组合的数量 N_1 ;然后利用式(9)、(10)计算 N_1 组关节角组合对应的归一化可操作度值。以归一化可操作度值等于 ω_c 作为分界点,将可达工作空间分为两个区域,归一化可操作度值大于等于 ω_c 以上的区域定义为灵活工作空间。得到的灵活工作空间被视为种子工作空间,因为机器人的工作空间是连续的,为了得到准确描述的工作空间边界,对种子空间进行扩展和加密。

第(2)步:采用改进的蒙特卡洛法对种子工作空间进行扩展和加密,加密完成得到机器人的灵活工作空间。不同于第 2.1 节中的算法 1 流程,此时需要加入新的约束条件,即新产生的关节角组合需要满足第 1 步中灵活工作空间定义的要求,满足条件的关节角保留,不满足的舍弃。

约束条件算法流程如下

算法 2: 约束条件

Given: Database_1, Database_2, σ , δ , N_{goal} , n_f^{max} , ω_{max} , ω_c

```

1   if  $q_i^*$  satisfies joint limits then
2        $\omega_i \leftarrow q_i^*$ 
3        $\omega_i^n \leftarrow \omega_i / \omega_{\text{max}}$ 
4       if  $\omega_i^n \geq \omega_c$ 
5            $P_i^* \leftarrow$  solve the forward kinematic problem
6       end if
7   else  $q_i^* \leftarrow \text{Normal}(q_c^0, \sigma)$ 
8       Database_1  $\leftarrow P_i^*$ 
9       Database_2  $\leftarrow q_i^*$ 
10  end if

```

2.3 体元化算法

体元是三维空间中的最小单位,体元化是指在三维空间中用一定数量的体元来模拟真实物体的形状。由于体元的大小是人为设定的,因此每个体元的体积是确定的,当真实物体被体元近似后,真实物体的体积可以近似为所有体元的个数乘以体元的体积^[20-21]。用体元化算法求取物体体积的原理如图 7 所示,对于图 7a 所示的空间散点组成的球体,首先用一个长方体完全包围,然后将长方体分割成小体元,小体元是正方体,边长记为 a 。对小体元进行编号,编号方法如图 4 所示,然后对体元进行遍历搜索,删除不包含工作空间点的体元的编号,建立一个数据库 Database_3,存入包含工作空间点的体元对应的编号。删除不包含空间散点的体元,得到图 7b 所示的用体元近似的物体形状。如图 7c

所示用体元化算法求取物体体积存在误差,误差大小取决于所用体元体积的大小,当体元的体积越小,用体元模拟的物体形状越接近物体实际的形状,求的体积精度越高。通过不断细化体元可以提高计算结果的精度,但是精度和效率成反比,为了提高计算精度的同时保证有较高的计算效率,提出了寻找物体边界的算法,如算法 3 所示。如图 7d 所示是算法 3 找到的代表物体边界部分的体元,通过只对该部分体元不断细化可以大大减少工作量进而提高计算效率。

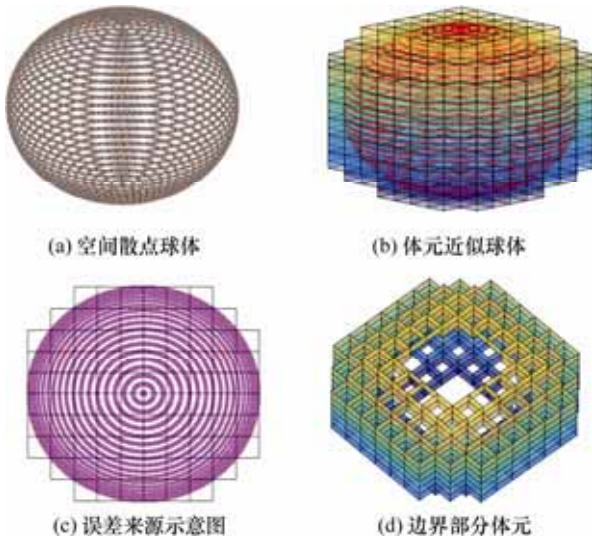


图 7 体元化算法原理图

算法 3：寻找边界和非边界体元

Given: $Database_3, a$

```

1   $R \leftarrow$  number of voxel in  $Database\_3$ 
2  for  $i = 1, 2, \dots, n$  do
3     $R_0 \leftarrow$  the remainder after division of  $R_i$  by  $a$ 
4    Condition 1  $\leftarrow R - 1 \notin Database\_3$ 
5    Condition 2  $\leftarrow R + 1 \notin Database\_3$ 
6    Condition 3  $\leftarrow R - a \notin Database\_3$ 
7    Condition 4  $\leftarrow R + a \notin Database\_3$ 
8    Condition 5  $\leftarrow R_0 = 1$ 
9    Condition 6  $\leftarrow R_0 = 0$ 
10   if Condition 1 to Condition 6 at least one is true then
11      $Database\_4 \leftarrow R$ 
12   end if
13 end for
14 return  $Database\_4$ 
```

在三维空间中每个体元最多有 6 个相邻的体元,对于任意选定的体元,如果与该体元相邻的所有体元中至少有一个体元中不含有工作空间中的点,即定义该体元为边界体元。为了简化寻找边界体元的过程,采用逐层寻找的方法,将三维空间中每一层体元投影到二维平面,此时每个体元有 4 个

相邻的体元。如图 8 所示是一个寻找边界体元和非边界体元的例子,图 8a 中是一个 5×6 的栅格图,每个栅格代表一个小体元,图中的点表示工作空间中的点。为了寻找到边界体元和非边界体元,首先对图 8a 中的所有小体元进行编号,如图 8b 所示。接着将不包含有点的小体元删除,将包含有点的小体元对应的编号存入数据库 $Database_3$ 。经过算法 3 的流程,对每个小体元分别判断 6 个条件(第 4, 5, 6, 7, 8, 9 行),其中前四个条件是判断每个小体元相邻的 4 个体元,如果 4 个小体元中出现特殊位置体元时,需要进行后两个条件的判断,只要满足其中一个条件,则认为该小体元是边界体元,然后将其对应的编号存入数据库 $Database_4$ 中(第 10, 11, 12 行);如果不满足任何一个条件,则该小体元是非边界体元。

						6	12	18	24	30
						5	11	17	23	29
						4	10	16	22	28
						3	9	15	21	27
						2	8	14	20	26
						1	7	13	19	25

(a) 二维平面中体元图

(b) 体元编号示意图

图 8 寻找边界体元示意图

寻找到边界体元后,通过只对这些体元不断细化,提高了计算结果的精度同时提高了计算的效率,细化过程如图 9 所示。

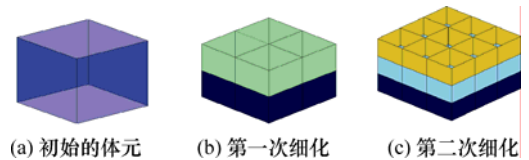


图 9 寻找边界体元细化示意图

用 V_1 表示物体非边界部分的体积, V_2 表示物体边界部分的体积, V 表示物体的体积, $i(1, 2, \dots, n)$ 表示图 9 所示过程中边界部分体元被细化的次数, ε 表示第 i 次细化后求得的物体体积相对第 $(i-1)$ 次细化后求得物体体积的误差。计算公式如下

$$V = V_1 + V_2 \quad (11)$$

$$\varepsilon = \frac{V^{i-1} - V^i}{V^{i-1}} \times 100\% \quad (12)$$

由于用体元化算法计算物体体积的过程本质上是一个近似的过程,理论上边界部分体元被细化的越小,求得物体体积精度越高,但是会大大增加计算耗时。因此,综合考虑计算精度和计算效率,以

相对误差为衡量指标,当相对误差 $\varepsilon \leq 1.00\%$ 时,认为求得的物体体积即为实际的物体体积。

3 工作空间仿真与分析

对图 1 所示的 9 自由度超冗余串联机械臂,用改进的蒙特卡洛法进行工作空间的仿真,各参数设置如表 3 所示。

表 3 参数设置表

参数	数值
关节变量随机取值个数 N_i	10 000
长方体离散个数 k	15×15×15
精度阈值 N_{goal}	150
正态分布标准差 σ	$\pi/3$
调整数 δ	1.5
临界值 n_f^{max}	5

3.1 可达工作空间仿真与分析

仿真得到的可达工作空间如图 10a、10b 所示,边界“光滑”,不离散,总共需要的采样点的数量是 935 010 个。

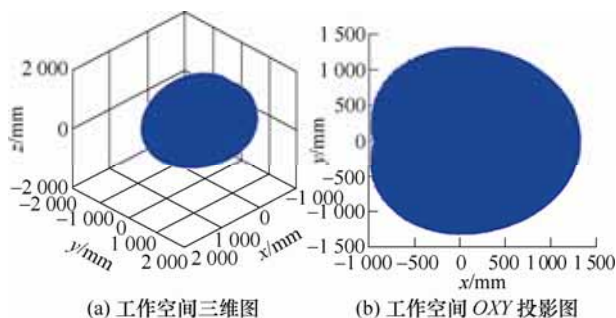


图 10 可达工作空间

针对改进的蒙特卡洛法求得的 9 自由度超冗余串联机器人的可达工作空间,采用体元化算法对其体积进行求取,具体过程如图 11 所示。

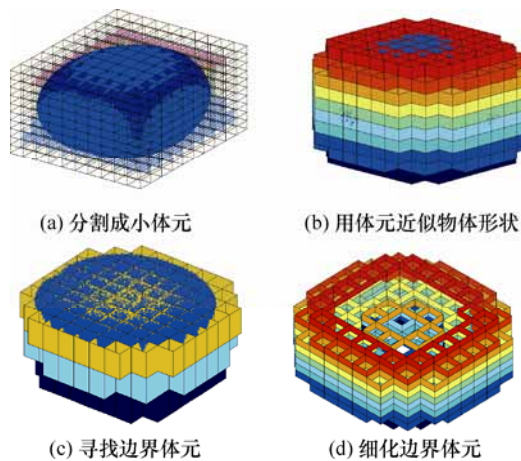


图 11 计算可达工作空间体积过程示意图

采用寻找边界体元的算法,寻找到边界体元,然后对边界体元不断细化,求得可达工作空间的体积,用 V_R 表示,计算过程中数据记录如表 4 所示。

表 4 可达工作空间体积求取过程数据记录表

次数 i	非边界部分体积 V_1 / mm^3	边界部分体积 V_2 / mm^3	可达工作空间体积 V_R / mm^3	相对误差 $\varepsilon(\%)$
1	$6.583 0 \times 10^9$	$4.179 0 \times 10^9$	$1.076 2 \times 10^{10}$	—
2	$6.583 0 \times 10^9$	$3.515 2 \times 10^9$	$1.009 8 \times 10^{10}$	6.17
3	$6.583 0 \times 10^9$	$3.211 5 \times 10^9$	$9.794 5 \times 10^9$	3.00
4	$6.583 0 \times 10^9$	$3.061 1 \times 10^9$	$9.644 1 \times 10^9$	1.54
5	$6.583 0 \times 10^9$	$2.914 6 \times 10^9$	$9.557 6 \times 10^9$	0.90

综上所述,求得的可达工作空间的体积是 $V_R = 9.557 6 \times 10^9 \text{ mm}^3$ 。

3.2 灵活工作空间仿真与分析

采用改进的蒙特卡洛法和灵活工作空间求取算法,设定临界可操作度值 $\omega_c = 0.8$ 求得的灵活工作空间如图 12a、12b 所示,总共需要的采样点的数量是 512 036 个。

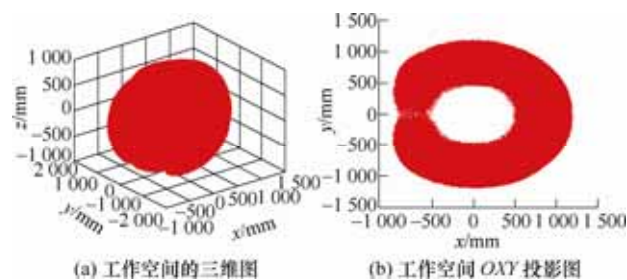


图 12 灵活工作空间

采用体元化算法求取灵活工作空间的体积,求取过程如图 13 所示。

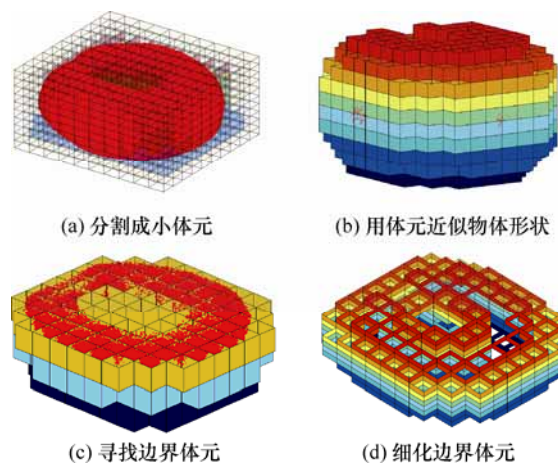


图 13 计算可达工作空间体积过程示意图

采用与求可达工作空间体积相同的方法,求得灵活工作空间的体积,用 V_F 表示,计算过程中的数据记录如表 5 所示。

表 5 灵活工作空间体积求取过程数据记录表

次数 i	非边界部分体积 V_1 / mm^3	边界部分体积 V_2 / mm^3	灵活工作空间体积 V_F / mm^3	相对误差 $\varepsilon(\%)$
1	$2.513\ 2 \times 10^9$	$4.179\ 8 \times 10^9$	$6.693\ 0 \times 10^9$	—
2	$2.513\ 2 \times 10^9$	$3.546\ 6 \times 10^9$	$6.059\ 8 \times 10^9$	9.46
3	$2.513\ 2 \times 10^9$	$3.267\ 8 \times 10^9$	$5.781\ 0 \times 10^9$	4.60
4	$2.513\ 2 \times 10^9$	$3.062\ 6 \times 10^9$	$5.575\ 8 \times 10^9$	3.55
5	$2.513\ 2 \times 10^9$	$2.976\ 7 \times 10^9$	$5.489\ 9 \times 10^9$	1.54
6	$2.513\ 2 \times 10^9$	$2.925\ 6 \times 10^9$	$5.438\ 8 \times 10^9$	0.93

同理，求得的灵活工作空间的体积是 $V_F = 5.438\ 8 \times 10^9 \text{ mm}^3$ 。

3.3 可达工作空间与灵活工作空间之间的关系

将上文仿真得到的机器人可达工作空间图与灵活工作空间图在同一个三维坐标系中表示出来，然后沿着坐标轴 Z 轴方向将图形从中间位置截开，截面如图 14 所示。从图中可以看出灵活工作空间是可达工作空间的子集，二者的分布关系如下所示。

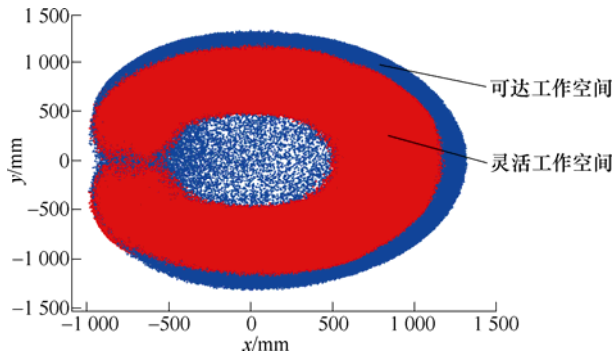


图 14 可达工作空间与灵活工作空间之间的关系图

在实际的生产实践中应用机器人进行工作时，为了满足安全性和可靠性的使用要求，需要机器人避开边界奇异位置和内部奇异位置，尽可能在操作性能好的灵活工作空间中运动。定义 η 表示灵活工作空间体积在整个可达工作空间体积中所占的比例， η 越大，表明机器人结构和构型设计越合理。

$$\eta = \frac{V_F}{V_R} \times 100\% \quad (13)$$

将图 1 所示机器人的 V_R 、 V_F 代入式(13)得

$$\eta = \frac{5.438\ 8}{9.557\ 6} \times 100\% = 56.9\% \quad (14)$$

3.4 SLI 指标

SLI(Structural length index)指标表明机械臂的结构效率，其定义为：机械臂连杆长度的总和与其可达工作空间体积的立方根的比值^[19]，计算式为

$$L = \sum_{i=1}^n (a_i + d_i) \quad (15)$$

$$Q_L = \frac{L}{\sqrt[3]{V_{ra}}} \quad (16)$$

式中， V_{ra} 为机械臂末端执行器可达工作空间的体积； a_i, d_i 为连杆的长度和连杆的偏置。

在设计机械臂的结构时， Q_L 的值越小机械臂的设计越优。将第 3.1 节中计算得到的可达工作空间体积代入式(15)、(16)得到图 1 所示 9 自由度超冗余串联机械臂的 Q_L 值为 0.623 9。

4 构型分析与优化

4.1 构型分析

为了便于下文中对构型的描述，将参考坐标系固定在关节 1 与基座连接处，如图 1 所示，分别用 R(Red)、G(Green)和 B(Blue)三种颜色表示 X 、 Y 和 Z 轴。采用欧拉角 RPY 定义机械臂关节运动，绕 X 轴方向的旋转为偏转(Yaw, Y)，绕 Y 轴方向的旋转为俯仰(Pitch, P)，绕 Z 轴方向的旋转为滚动(Roll, R)，分别用 R_Y 、 R_P 、 R_R 表示，其中大写字母 R 表示旋转(Revolute)关节运动副，下标表示旋转方向。图 1 中机械臂的构型可以表示为 $R_Y R_P R_Y R_P R_Y R_P R_Y R_P R_Y$ 。

在进行冗余自由度机械臂的构型设计时，通常将机械臂的机构分为满足机械臂基本工作空间要求的位置结构和反映末端执行器姿态要求的姿态结构两部分。尽管冗余自由度机械臂可由不同的运动副组成，但是从工作空间范围、灵活性、避障和驱动装置的安排的角度来考虑，一般在冗余自由度机械臂的设计中全采用转动副^[22]。TSAI 等^[23]对位置结构和姿态结构进行了综合，提出了最佳位置结构和最佳姿态结构形式，如图 15 所示。

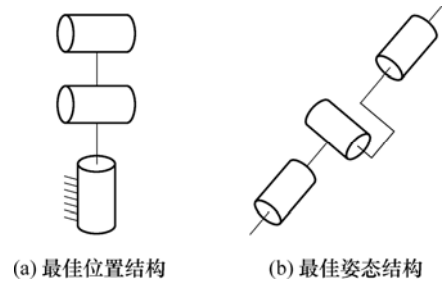


图 15 最佳位置与最佳姿态结构图

采用最佳位置结构和最佳姿态结构可组成如图 16 所示的具有最优灵活工作空间的 6 自由度机械臂。

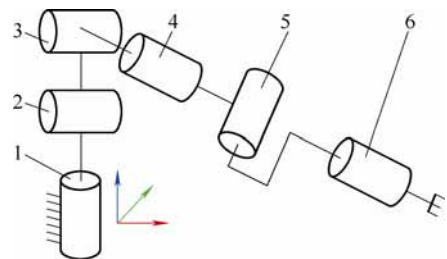


图 16 6 自由度机器人构型

目前, 7 自由度串联机械臂中有两种公认的最佳构型^[22], 一般的 7 自由度串联机械臂都采用这两种构型。这两种构型均是在具有最优灵活工作空间的 6 自由度机械臂的配置中添加一个转动副构成的。

图 17 所示的 7 自由度机械臂是在图 16 所示 6 自由度机械臂关节 2 后增加一个横滚转动副构成的。这种 7 自由度机械臂具有和手臂相似的结构, 可以将前三个关节看成一个球副的肩关节, 将后三个关节看成球副的腕关节, 中间的关节看成肘关节。它可以绕连接肩腕两球副之间的直线做自运动。利用这种特性不仅可以方便地避开一些障碍物, 而且可以完全消除手腕和肩部的奇异。此外, 由于各个运动副是独立分离的, 因此不会影响驱动装置的安装。

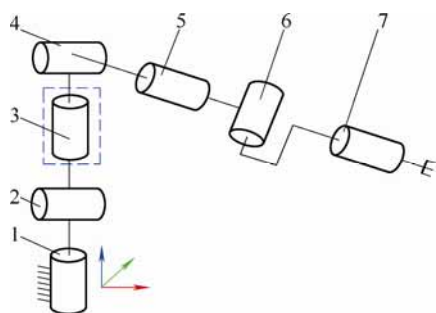


图 17 7 自由度机器人构型

图 18 所示的是另一种结构形式的 7 自由度机械臂, 它是图 16 所示 6 自由度机械臂关节 3 后增加一个俯仰运动的转动副后得到的。该机械臂可以看成是由三个自由度的肩、一个自由度的肘和三个自由度的腕组成。这种结构形式也可以产生自运动而不改变手部的位形, 从而完全消除肩和腕部出现的奇异情况, 而且也有利于避开障碍物。

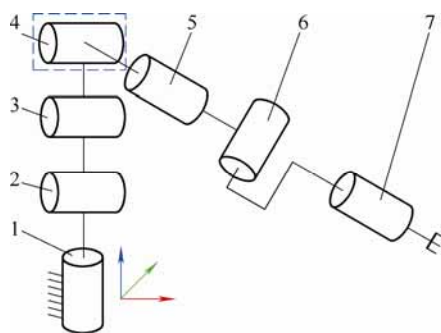


图 18 7 自由度机器人构型

在结构上, 9 自由度超冗余机械臂是由 9 个关节串联而成的空间开式链。由于采用的运动副的种类和顺序的不同, 可以得到多种结构形式的冗余自由度机械臂。每个关节的运动副有 3 种类型, 9 个关节所有运动副的组合有 $3^9 = 19\,683$ 种。显然, 基于任何一种评价指标, 为了选取一种最优构型, 由于工作量巨大, 所以不可能对每一种构型进行分析。

因此, 本文中将 9 自由度超冗余串联机械臂视为“7+2”组合形式, 首先选取了两种最常使用的 7 自由度构型方案, 然后分别添加两个自由度构成 9 自由度机械臂。添加自由度的步骤如下。

第(1)步: 选位, 即确定自由度要添加的位置。对于 9 自由度的超冗余串联机械臂, 总共有 9 个位置。自由度可以添加在当前没有自由度存在的任何一个位置上。

第(2)步: 选型, 即确定添加自由度的类型。因为所有运动副皆为旋转副, 所以相对于参考坐标系, 每个自由度有三种类型可供选择, 即 R_Y 、 R_P 和 R_R 。

基于以上分析, 按照自由度添加的步骤, 在图 17 所示 7 自由度机械臂的基础上添加两个自由度, 添加示意图如图 19 所示。

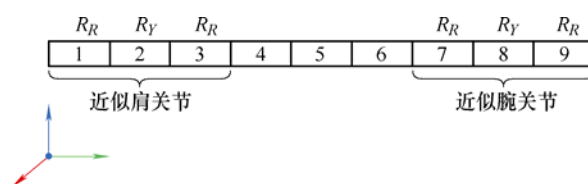


图 19 添加自由度示意图

添加两个自由度时可供选择的位置是 4、5、6, 每个自由度有三种可选类型, 经过排列组合总共得到 54 种构型方案, 去掉重复构型 33 种, 去掉 4、5、6 关节处的三个自由度类型相同的构型 3 种, 最后得到 18 种构型方案, 如表 6 所示。

表 6 构型方案表

编号	近似肩关节	近似肘关节			近似腕关节
		4	5	6	
1				R_P	
2			R_P	R_Y	
3				R_R	
4			R_Y	R_P	
5				R_R	
6				R_P	
7			R_R	R_Y	
8				R_R	
9	$R_R - R_Y - R_R$			R_P	$R_R - R_Y - R_R$
10		R_P		R_Y	
11			R_Y	R_R	
12				R_P	
13		R_R		R_Y	
14				R_R	
15		R_P	R_P		
16			R_R	R_Y	
17		R_P	R_P		
18		R_R	R_R		

在图 18 所示 7 自由度机械臂的基础上添加两个自由度，添加示意图如图 20 所示。

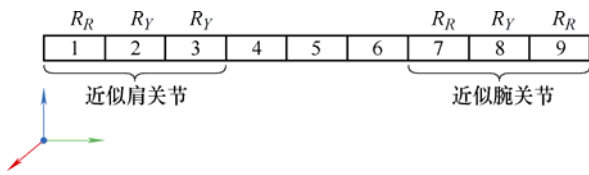


图 20 添加自由度示意图

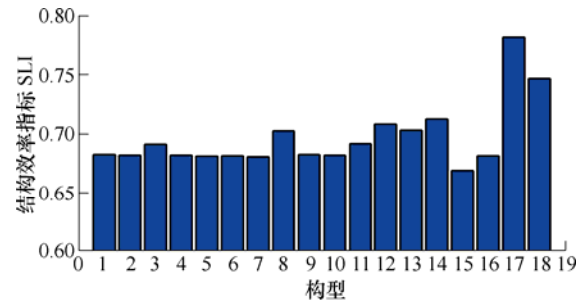
同理，经过排列组合总共得到 54 种构型方案，去掉重复构型 33 种，去掉 4、5、6 关节处的三个自由度类型相同的构型 3 种，最后得到 18 种构型方案，如表 7 所示。

表 7 构型方案表

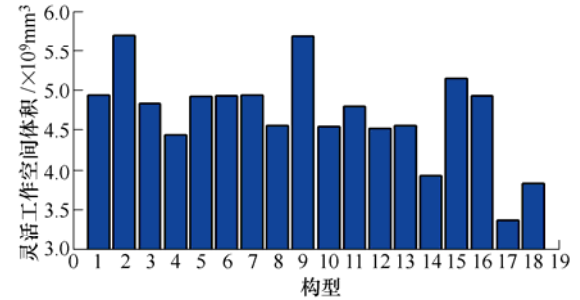
编号	近似肩关节	近似肘关节			近似腕关节
		4	5	6	
1				R_p	
2			R_p	R_y	
3				R_R	
4			R_y	R_p	
5				R_R	
6				R_p	
7			R_R	R_y	
8				R_R	
9				R_p	
10	$R_R - R_y - R_y$	R_p		R_y	
11			R_y	R_p	
12				R_R	
13		R_R		R_y	
14				R_R	
15		R_p		R_p	
16			R_R	R_y	
17				R_p	
18		R_R		R_R	

4.2 构型优化

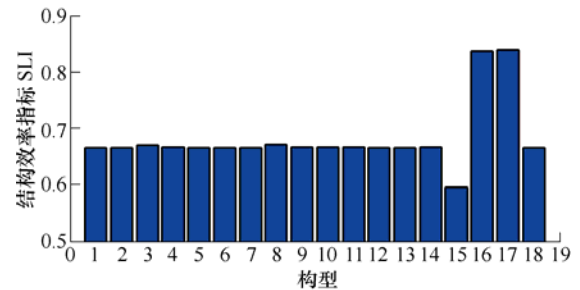
对表 6 中的 18 种构型和表 7 中的 18 种构型进行仿真分析，分别计算每种构型的可达工作空间体积、灵活工作空间体积和 SLI 指标。求取灵活工作空间时以 $\omega_c = 0.8$ 为分界点，每种构型的最大可操作度的值按照第 2.2.2 节中的分析方法得到。仿真结果如图 21 所示，由于 36 种构型的连杆长度与连杆偏置之和均相等，因此分析可达工作空间体积和 SLI 指标得到的结果等效。图 21a、21b 表示表 6 中 18 种构型的 SLI 指标和灵活工作空间体积，图 21c、21d 表示表 7 中 18 种构型的 SLI 指标和灵活工作空间体积。



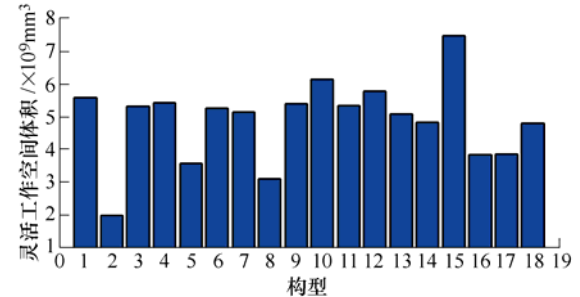
(a) SLI 指标仿真结果条形图



(b) 灵活工作空间体积



(c) SLI 指标仿真结果条形图



(d) 灵活工作空间体积

图 21 仿真结果直方图

结果表明在 36 种构型方案中，表 7 中编号 15 的构型方案最优，该构型为 $R_R R_Y R_Y R_P R_P R_Y R_R R_Y R_R$ 。

将选取的构型与图 1 所示构型方案比较，定义构型 1 表示图 1 中构型，构型 2 为本文所选择的构型，比较结果如表 8 所示。

表 8 两种构型指标对比表

构型	可达工作空间体积 $V_R / \times 10^9 \text{ mm}^3$	灵活工作空间体积 $V_F / \times 10^9 \text{ mm}^3$	结构效率 SLI	$\eta(\%)$
1	9.557 6	5.438 8	0.623 9	56.9
2	12.089 0	7.430 5	0.593 7	61.5

结果表明所选构型方案的三个指标均优于图 1

所示构型的三个指标。其中可达工作空间体积较图 1 构型提高 26.49%，灵活工作空间体积较图 1 构型提高 36.62%。

5 结论

(1) 分析了求取机器人工作空间的蒙特卡洛法存在的问题，提出了基于正态分布的改进的蒙特卡洛法，通过设置一个精度阈值，保证了工作空间中每个位置都被精确的描述，求得的工作空间更加接近机器人实际的工作空间，边界“光滑”，不离散，求得精确工作空间时所用的随机关节角组合的数量大大减少，降低了计算成本。

(2) 采用归一化可操作度指标分析机器人运动的灵活性，通过数值仿真的方法得到了可操作度值与关节角组合数量之间的关系，进而求得最大可操作度的值。分析了测量机器人整体灵活性的指标，得到了表达灵活工作空间的方法，提出了求取灵活工作空间的算法。

(3) 提出了体元化算法计算机器人工作空间的体积，将工作空间分为边界部分和非边界部分，通过只对边界部分体元的不断细化，保证了高精度、高效率。设计的体积求取算法效率较高，相对误差小于 1%。

(4) 研究了 9 自由度超冗余机械臂构型方案选择的问题，提出了基于工作空间分析的解决方法。

综合考虑可达工作空间体积、灵活工作空间体积以及 SLI 指标，在 36 种待选构型中选取了一组最优构型。将所选构型与图 1 中所示构型进行了对比分析，仿真结果表明所选构型较图 1 中构型在三个指标方面均有明显改善，其中可达工作空间体积较图 1 构型提高了 26.49%，灵活工作空间体积较图 1 构型提高了 36.62%。

参 考 文 献

- [1] 周玉林, 高峰. 仿人机器人构型[J]. 机械工程学报, 2006, 42(11): 66-74.
ZHOU Yulin, GAO Feng. Mechanism architecture of humanoid robot[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(11): 66-74.
- [2] 赵京, 宋春雨, 杜滨. 基于人体工程学的仿人机械臂构型[J]. 机械工程学报, 2013, 49(11): 16-21.
ZHAO Jing, SONG Chunyu, DU Bin. Configuration of humanoid robotic arm based on human engineering[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(11): 16-21.
- [3] 孟得山, 王学谦, 梁斌, 等. 基于头部碰撞等效模型的柔性关节机械臂安全构型优化[J]. 机器人, 2017, 39(4): 523-531.
- MENG Deshan, WANG Xueqian, LIANG Bin, et al. Safe configuration optimization of flexible joint manipulator based on equivalent model of head collision[J]. Robot, 2017, 39(4): 523-531.
- [4] SICILIANO B, KHATIB O. Springer, Handbook on robotics[M]. Springer Handbook of Robotics, 2014.
- [5] ZACHARIAS F, HOWARD I S, HULIN T, et al. Workspace comparisons of setup configurations for human-robot interaction[C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots & Systems, 2010.
- [6] 李宪华, 疏杨, 张雷刚, 等. 机械臂工作空间全局相对可操作度图的构建方法[J]. 安徽理工大学学报, 2016, 36(1): 56-61.
LI Xianhua, SHU Yang, ZHANG Leigang, et al. A method of constructing global relative manipulability map for manipulator[J]. Journal of Anhui University of Science and Technology, 2016, 36(1): 56-61.
- [7] 贾庆轩, 王宣, 陈钢, 等. 基于位姿可达空间的太空机械臂容错路径规划[J]. 航空学报, 2018, 39(8): 299-309.
JIA Qingxuan, WANG Xuan, CHEN Gang, et al. A fault tolerant path planning method for space manipulator based on position and orientation reachable space[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2018, 39(8): 299-309.
- [8] CAO Y, LU K, LI X, et al. Accurate numerical methods for computing 2D and 3D robot workspace[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2011, 8(6): 1-13.
- [9] 刘志忠, 柳洪义, 罗忠, 等. 机器人工作空间求解的蒙特卡洛法改进[J]. 农业机械学报, 2013, 44(1): 230-235.
LIU Zhizhong, LIU Hongyi, LUO Zhong, et al. Improvement on Monte Carlo method for robot workspace determination[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(1): 230-235.
- [10] PEIDRO A, ÓSCAR R, GIL A, et al. An improved Monte Carlo method based on Gaussian growth to calculate the workspace of robots[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2017, 64: 197-207.
- [11] CAO Y, QI S, LU K, et al. Shape and size computation of planar robot workspace[C]// Computer Science and Information Engineering, 2009 WRI World Congress on. IEEE, 2009: 126-130.
- [12] 田海波, 马宏伟, 魏娟. 串联机器人机械臂工作空间与结构参数研究[J]. 农业机械学报, 2013, 44(4): 196-201.
TIAN Haibo, MA Hongwei, WEI Juan. Workspace and structural parameters analysis for manipulator of serial

- robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(4): 196-201.
- [13] 何俊培, 徐振邦, 于阳, 等. 九自由度超冗余机械臂的设计和测试[J]. 光学精密工程, 2017, 25(12): 80-86.
- HE Junpei, XU Zhenbang, YU Yang, et al. Design and experimental testing of a 9-DOF hyper-redundant robotic arm[J]. Optics and Precision Engineering, 2017, 25(12): 80-86.
- [14] 谢碧云, 赵京. 机器人运动灵活性问题研究概述[J]. 机械科学与技术, 2011, 30(8): 1386-1393.
- XIE Biyun, ZHAO Jing. Advances in robotic kinematic dexterity and indices[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2011, 30(8): 1386-1393.
- [15] TADOKOR S, KIMURA I, TAKAMORI T. A dexterity measure for trajectory planning and kinematic design of redundant manipulators[C]//Industrial Electronics Society, 1989. IECON'89. Conference of IEEE. IEEE, 1989: 415-420.
- [16] YOSHIKAWA T. Analysis and control of robot manipulators with redundancy[J]. The first Int. Symp. of Robotics Research, 1984(1): 735-747.
- [17] 陈钢, 李彤, 贾庆轩, 等. 空间机械臂末端力/位容错过程中关节参数突变抑制[J]. 机械工程学报, 2017, 54(3): 36-45.
- CHEN Gang, LI Tong, JIA Qingxuan, et al. Reducing the joint parameter jump during the operation of the force/position fault-tolerant of end-effector for space manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 54(3): 36-45.
- [18] YOSHIKAWA T. Manipulability of robotic mechanisms [J]. Int. J. Robot. Res., 1985, 4(2): 3-9.
- [19] LENARČIČ J, THOMAS F. Advances in robot kinematics: Theory and applications[M]. Netherlands: Springer, 2002.
- [20] SAJDAK M, ESTORNELL J, RECIO J A. Different methodologies for calculating crown volumes of platanus hispanica trees using terrestrial laser scanner and a comparison with classical dendrometric measurements[J]. Computers & Electronics in Agriculture, 2013, 90: 176-185.
- [21] 王佳, 张芳菲, 高赫, 等. 地基激光雷达提取单木冠层结构因子研究[J]. 农业机械学报, 2018, 49(2): 199-206.
- WANG Jia, ZHANG Fangfei, GAO He, et al. Extracting crown structure parameters of individual tree by using groundbased laser scanner[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(2): 199-206.
- [22] 陆震. 冗余自由度机器人原理及应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007.
- LU Zhen. Principle and application of redundant DOF robots[M]. Beijing: China Machine Press, 2007.
- [23] TSAI Y C, SONI A H. Workspace synthesis of 3R, 4R, 5R and 6R robots[J]. Mechanism & Machine Theory, 1985, 20(6): 555-563.

作者简介: 赵智远, 男, 1994 年出生。主要研究方向为柔性机器人运动学。

E-mail: zhaozyjdx@126.com

徐振邦(通信作者), 男, 1982 年出生, 博士, 研究员, 博士研究生导师。主要研究方向为空间智能机器人、空间遥感器设计、振动控制。

E-mail: xuzhenbang@gmail.com