

基于 LQR 的激光器锁相控制器设计和噪声抑制分析*

陈泳鲲 于 涛 隋延林

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所 长春 130033)

摘 要: 空间引力波探测的超高精度要求以及对激光器线宽和调节带宽的限制,对实现应答式星间激光干涉仪的光学锁相的控制器设计提出了更高的要求。而如何在控制带宽受限的情况下提高系统对激光器相位噪声的抑制作用是当前要解决的一个问题。本文设计了一种内模扩展输出反馈 LQR 控制器,在保证锁相系统稳定,不出现周跳现象的前提下,提高系统对激光器相位噪声的抑制作用。仿真实验结果表明,相较于现有的 PI 控制器,在 20 kHz 的控制带宽下,所设计的控制器对激光器相位噪声的抑制效果提高了 3 倍。此控制器降低了控制系统对激光器最大线宽的约束条件。

关键词: 空间引力波探测;激光器控制;LQR 控制器;噪声抑制

中图分类号: TP29 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.8

Design and noise analysis of phase-locked controller based on LQR

Chen Yongkun Yu Tao Sui Yanlin

(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Science, Changchun 130033, China)

Abstract: The high-precision requirements of space gravitational wave detection and the limitation of laser line width and adjustment bandwidth put forward higher requirements for the design of the controller for realizing the optical phase lock of the response intersatellite laser interferometer. However, how to improve the system's suppression of laser phase noise when the control bandwidth is limited is a problem to be solved at present. In this paper, an internal model extended output feedback LQR controller is designed to improve the suppression of the phase noise of the laser under the premise of ensuring the stability of the phase-locked system and no cycle slip phenomenon. The simulation experiment results show that compared with the existing PI controller, under the control bandwidth of 20 kHz, the controller designed can improve the laser phase noise suppression effect by 3 times. This controller reduces the control system's constraint on the maximum line width of the laser.

Keywords: space gravitational wave detection; laser control; LQR controller; noise suppression

0 引 言

近年来快速发展的空间引力波探测任务,对超高精度星间激光干涉测量技术提出了极其苛刻的技术要求。在典型的空间引力波探测中,要求在百万公里距离上,在测量带宽内($10^{-4} \sim 1$ Hz)实现皮米量级的激光干涉测量精度^[1]。由于激光传播距离长以及光束发散角的存在,卫星之间接收到的激光信号强度会非常弱,需要采用应答式激光干涉测量技术^[2]。

应答式激光干涉仪通过光学锁相环控制本地激光器跟踪接收到的激光信号的频率和相位,完成整个干涉测量的任务。对于光学锁相环来说,反馈控制回路的性能是影响剩余相位噪声的关键因素^[2],而为了达到引力波探测所需

要的测量精度,光学锁相环需要克服散粒噪声,相位读出噪声,激光器相位噪声的影响,同时由于空间载荷的限制,激光器的线宽和压控振荡器的调节带宽都存在一定的限制,这对控制器的设计提出了更高的要求。在整个过程中,由于卫星的运动导致激光信号存在多普勒频移,这使得在设计光学锁相环控制器的时候,必须考虑锁相环的周跳现象,避免在科学测量的过程中发生失锁的情况。

已有的光学锁相环的控制器通常采用 PI 控制器^[3-8]或者滞后校正控制器^[9],这种控制器可以在一般情况下满足系统对噪声的抑制需求,但是如果想要提高系统对激光器相位噪声的抑制作用,必须提高系统的控制带宽。而且在已有的文献中,较少有分析激光器线宽、控制器带宽和周跳

收稿日期:2021-09-16

* 基金项目:国家重点研发计划(2020YFC2200604)项目资助

现象对光学锁相环控制器性能的影响。

针对上述问题,本文设计了一种内模扩展的输出反馈线性二次型最优(LQR)控制器,在控制带宽不变的情况下,提高系统的噪声抑制能力,在保证系统稳定的前提下,降低控制系统对激光器线宽的约束条件。

1 噪声分析与设计约束

光学锁相系统在光路、电路、数据采集等多方面存在噪声。这些噪声主要包括散粒噪声、激光器相位噪声、相位读出噪声、光学噪声、环境噪声等^[10]。

光学噪声和环境噪声可以通过提高光路的精度,提高实验环境抗干扰能力来抑制。相位读出噪声可以通过使用pilot tone校正技术^[3]以及合理的硬件电路设计,减小由ADC的采样时间抖动引起的相位误差。因此这些噪声本文不予考虑。

散粒噪声是一个量子噪声限值,是影响整个科学测量的指标的根本因素。因此锁相环的优化设计必须保证散粒噪声占主导地位,尽可能地压低其他噪声对系统的影响。激光器相位噪声属于光学锁相环的环内噪声,可以通过闭环控制系统进行抑制,是光学锁相环控制器需要着重考虑抑制的噪声。

为了评估控制器的性能,本文将光学锁相环路的相位误差方差表示为激光器相位噪声和光电探测器散粒噪声之和,由噪声的功率谱密度与噪声通道传递函数模乘积的积分表示^[11-12]:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_p(f) |H_d(j2\pi f)|^2 df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_s(f)}{k_s^2} |H(j2\pi f)|^2 df \quad (1)$$

其中, $H(j2\pi f)$ 是锁相环的闭环传递函数的频率响应, $H_d(j2\pi f)$ 是激光相位噪声到相位误差传递函数的频率响应, k_s 是相位探测器增益常数, $S_p(f)$ 和 $S_s(f)$ 分别是激光相位噪声和探测器散粒噪声的双边功率谱,其值为:

$$\begin{aligned} S_p(f) &= \delta f / (2\pi f^2) \\ S_s(f) &= 2ep_v \\ k_s &= 2k_d \sqrt{p_v p_r} \end{aligned} \quad (2)$$

其中, p_r 是接收到的主激光器信号功率, p_v 是从激光器信号功率, δf 是从激光器的线宽, k_d 是鉴相器增益。

从式(2)中可以看出,激光器相位噪声与激光器的线宽有直接关系。通常通过增大激光器功率、增加激光器腔长、减小激光器的损耗等方法可以尽可能地降低激光器的线宽,但是由于空间载荷以及地面试验装置的限制,无法任意的降低激光器的线宽。

同时在空间引力波探测过程中,卫星间的相对运动会使得激光信号发生多普勒频移,由此引发的周跳现象严重影响了科学测试的可行性^[13],并且限制了激光器线宽选取。根据文献[14]中所述,噪声引起的相位偏移会使环路失锁,从而导致激光器输出信号滑移一个或多个周期,这种

现象叫做周跳。锁相环出现周跳现象的平均时间间隔可以近似为式(3)形式。

$$T_{av} \approx \frac{\pi e^{(2/\sigma^2)}}{4 \int_0^{\infty} |H(j2\pi f)|^2 df} \quad (3)$$

由于空间引力波计划需要探测低至 $f_{gw} = 10^{-4}$ Hz 的引力波信号,所以必须保证在 $T_{av} = 1/f_{gw} = 10\,000$ s 的时间内系统的稳定。所以出现周跳的时间间隔必须大于 10 000 s。

设:

$$I_p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H_d(j2\pi f)|^2}{f^2} df \quad (4)$$

$$B_n = \int_{-\infty}^{\infty} |H(j2\pi f)|^2 df$$

由式(3)和式(1)可以得到:

$$\delta f = \frac{\pi}{I_p} \left[\frac{2}{\ln(4B_n T_{av} / \pi)} - \frac{eB_n}{RP_r} \right] \quad (5)$$

由此得出了周跳间隔对于系统所允许的激光器线宽的约束关系。

现有的控制器设计采用PI控制器的形式,想要提高对激光器相位噪声抑制,只能通过提高控制带宽来实现。但是由于实际使用的激光器压控调节带宽有限(通常小于 100 kHz),系统的控制带宽无法无限制的提高,这对控制器的设计提出了另外的一个约束。

为了解决这些问题,本文设计了一种内模扩展的输出反馈 LQR 控制器,在系统控制带宽有限的前提下,提高系统对激光器相位噪声抑制作用。

2 光学锁相环模型

为了实现控制器的设计,首先需要对光学锁相环进行数学建模。光学锁相环路原理如图 1 所示,环路主要由激光器、混频器和控制器等组成^[15]。

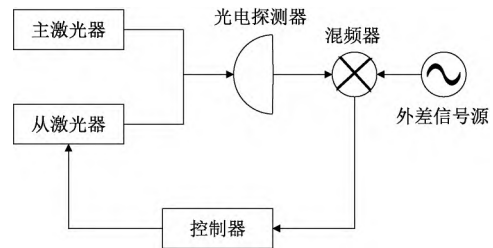


图1 光学锁相环系统原理

光学锁相环实现的途径如下:主从两束激光干涉后,由光电探测器获得拍频信号,拍频信号与参考源信号在混频器处混频得到误差信号,经过控制器处理后反馈到从激光器的频率控制端,调整从激光器的输出频率,实现对主激光器的跟踪。下面介绍各个模块的数学模型。

2.1 鉴相环节

鉴相环节包括光电探测器和混频器,光电探测器将两

束激光器的拍频信号转化为电信号,混频器将参考信号与拍频信号混频,得到误差信号。当锁相环锁定时,参考信号和激光干涉拍频信号的频率相同。当混频器产生的相位误差信号较小时,混频器的正弦函数可以用它的自变量近似,由此可以得到鉴相环节的线性模型:

$$U_e(s) = k_d \theta_e(s) = k_d(\theta_i(s) - \theta_o(s)) \quad (6)$$

其中, $U_e(s)$ 是混频器产生的相位误差信号; $\theta_i(s)$ 和 $\theta_o(s)$ 分别是输入参考源和拍频信号的相位参数; $\theta_e(s)$ 被定义为误差信号的相位参数。

2.2 控制器

光学锁相环中的控制器通常被称为环路滤波器,通常采用 PI 控制器的形式,它将误差信号转化为从激光器的 PZT 电压控制信号,其线性模型可以表示为:

$$U_f(s) = F(s)U_e(s) = (k_p + \frac{k_i}{s})U_e(s) \quad (7)$$

其中, $U_f(s)$ 是控制信号; $F(s)$ 为控制器的传递函数,此处为 PI 控制器形式; k_p 和 k_i 分别是比例控制参数和积分控制参数。

2.3 激光器

应答式干涉仪中通常采用固体激光器,激光器的输出频率由激光器腔长决定,其线性模型可以表示为:

$$\theta_s(s) = \frac{2\pi c}{L_0^2 s} L(s) \quad (8)$$

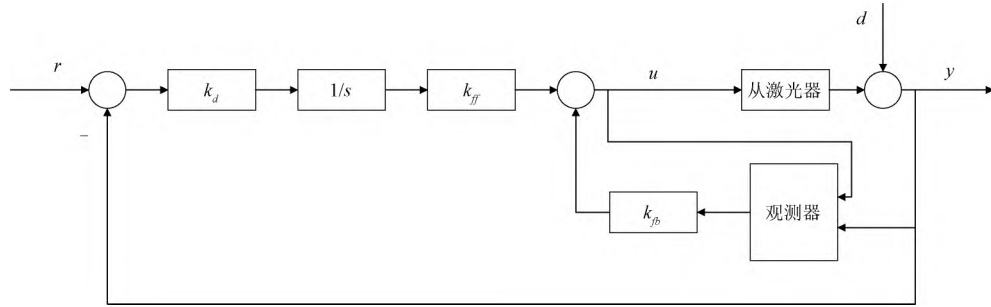


图 2 内模扩展的输出反馈 LQR 控制系统结构

其中, r 是参考相位信号, u 是控制信号, y 是激光器输出的相位信号, d 是激光器的相位噪声, k_d 是鉴相器增益,前向通道加入的积分环节为内模状态,其作用是消除稳态误差,与 PI 控制器中的积分控制器作用相同,状态观测器的作用是利用激光器的理论模型估计实际激光器状态,前向通道的放大倍数 k_{ff} ,与反馈通道的 k_{fb} 共同构成了扩展系统的状态反馈参数,反馈控制器是利用状态观测器得到的系统状态信息输出控制信号,改变系统的动态性能。下面分别介绍状态反馈和观测器的设计方法。

3.1 LQR 状态反馈控制器设计

根据控制系统的分离原理,系统的状态反馈和状态观测器可以单独设计互不影响。这里先设计状态反馈。首先将激光器的数学模型式(10)转化为状态空间形式:

其中, $\theta_s(s)$ 为从激光器的输出相位, $L(s)$ 为等效腔长, c 为光速, L_0 为初始腔长。

激光器通常使用 PZT 调节腔体总长度,用于微调输出频率。PZT 的长度由输入电压信号控制。其线性模型看作是一阶时间延迟装置。由此得到整个激光器的线性模型为:

$$\theta_s(s) = \frac{2\pi c k_0}{L_0^2 s (T_0 s + 1)} U_f(s) \quad (9)$$

其中, k_0 为 PZT 调节增益, T_0 是时延参数。 T_0 的大小决定了 PZT 的最大调节带宽,也就限制了系统的控制带宽。

通过上述公式可以得到系统开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{2\pi c k_0 k_d}{L_0^2 s (T_0 s + 1)} F(s) \quad (10)$$

闭环传递函数为:

$$H(s) = \frac{G(s)}{G(s) + 1} \quad (11)$$

由此本文得到了整个系统的数学模型。

3 LQR 输出反馈控制器设计

为了在控制带宽有限的情况下,提高系统对从激光器频率噪声的抑制效果,本文设计了内模扩展的输出反馈 LQR 控制器,其结构如图 2 所示。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{其中, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ck_0}{T_0 L_0^2} \\ 0 & -\frac{1}{T_0} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = [0 \quad k_d]^T, \mathbf{C} = [2\pi \quad 0]$$

为系统矩阵, u 表示控制信号, $\mathbf{x}$ 表示激光器的状态, y 表示激光器的输出信号。进而可以写出扩展系统的状态空间表达式如下:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ k_d * \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}/k_d \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [\mathbf{C} \quad 0] \mathbf{x} \end{cases} \quad (13)$$

其中, $\mathbf{x}_i$ 表示前向通道的扩展状态。

本文使用 LQR 算法设计状态反馈控制参数,考虑控

制器设计使得系统的相位误差和控制信号尽可能小,选取目标状态 z 为如下形式:

$$z = \begin{bmatrix} y \\ \gamma x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} \quad (14)$$

将控制器设计问题转化为求解控制信号 $u(t)$ 在 $t \in (0, \infty)$ 范围内使得性能指标式(15)最小。

$$J_{LQR} = \int_0^\infty (\|z(t)\|^2 + \rho \|u(t)\|^2) dt \quad (15)$$

其中, γ, ρ 为 LQR 控制器参数。通过求解上式所对应的 Riccati 方程, 可以计算得到使性能指标 J_{LQR} 最小的状态反馈控制参数 $u = [k_{fb} \quad k_{ff}] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$ 。

3.2 状态观测器设计

接下来设计状态观测器。现代控制理论指出若线性定常系统完全能观, 则其状态矢量可由输出和输入进行重构。观测器的结构如图 3 所示。

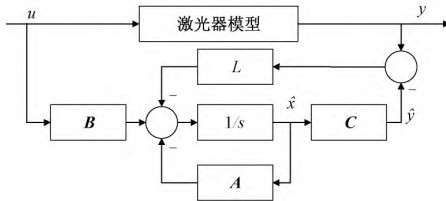


图3 观测器结构

其中, $\hat{x}, \hat{y}$ 为激光器状态和输出的估计值, L 为观测矩阵, A, B, C 为式(12)中的系统矩阵。状态观测器的表达式可写为:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (16)$$

设观测误差 $e_x = x - \hat{x}, e_y = y - \hat{y}$ 则有:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = (A - LC)e_x \\ e_y = Ce_x \end{cases} \quad (17)$$

当 $(A - LC)$ 的奇异值均为负的时候系统稳定, e_x 将渐进收敛为 0。 $(A - LC)$ 的特征根便是观测器的极点, 通过极点配置的方法便可计算得到观测矩阵 L 。观测器的极点负实部离原点越远, 观测误差收敛越快。

结合式(13)和(16), 并考虑参考输入和噪声输入, 得到整个闭环控制系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{x}_i \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & Bk_i & Bk_p \\ -k_d C & 0 & 0 \\ -LC & Bk_i & A + Bk_p + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_i \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_d \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y = [C \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_i \\ \hat{x} \end{bmatrix} + d \end{cases} \quad (18)$$

本文可以根据上式计算出系统的开环、闭环以及噪声传递函数。

4 仿真实验对比

使用 MATLAB 进行仿真实验, 验证前文所设计的控制器对噪声的抑制效果。实际使用的 1 064 nm 激光器, PZT 调节的响应带宽为 100 kHz, 调节系数为 2 MHz 级别, 激光器线宽在 10 kHz 级别。选取激光器参数 $k_i = 2 \text{ MHz/V}$, $T_0 = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$, 鉴相器增益 $R = 0.5$ 。根据文献[3]中设计的 PI 控制器, 将系统控制带宽调整到 20 kHz, 设置 LQR 控制器参数 $\gamma = 305\,000$, $\rho = 100$, 将系统控制带宽也调整到 20 kHz。两个控制器仿真对比图如图 4 所示, 其中虚线为 LQR 控制器, 实线为 PI 控制器。

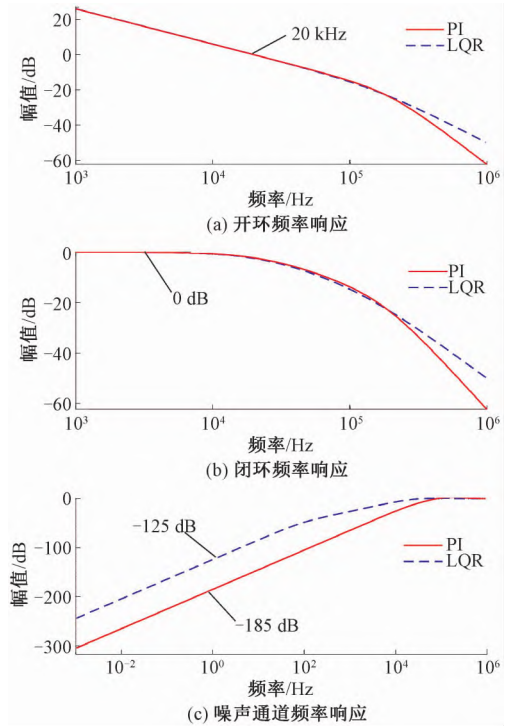


图4 系统频率响应对比图

从图 4 中可以看出, 两种控制系统的动态性能基本一致, 开环截止频率均为 20 kHz, 开环和闭环频率响应中低频带基本一致, 稳定性和动态性能基本相同。在引力波测量带宽范围内, 相较于 PI 控制系统, LQR 控制系统激光器相位噪声通道传递函数幅度更低, 整体上对噪声的抑制性能更好。以 1 Hz 处为例, PI 控制器的噪声增益为 -125 dB, LQR 控制器噪声增益为 -185 dB。

图 4 中关键数据整理如表 1 所示。

表1 幅频响应对比

控制器	开环截止 频率/kHz	闭环低频 增益/dB	噪声通道 1 Hz 处增益/dB
PI	20	0	-125
LQR	20	0	-185

取接收的主激光器信号功率设置为 $p_r = 10 \text{ pW}$, 从激光器激光功率 $p_v = 1 \text{ mW}$, 激光器线宽 $\delta f = 10 \text{ kHz}$ 。根据式(1)和(2)计算两种控制器的相位误差方差和周跳间隔如表 2 所示。

表 2 控制器性能对比

控制器	整体方差	相位噪声	散粒噪声	周跳间隔/s
PI	0.282 4	0.281 4	0.001	0.03
LQR	0.089 3	0.088 2	0.001 1	12 726

由于两个控制器下系统闭环传递函数基本一致, 散粒噪声引起的相位误差方差基本一致, 相位误差方差主要由激光器相位噪声决定。从表 2 中可以看出, 相较于 PI 控制器, LQR 控制系统激光器相位噪声小了将近 3 倍。

从表 2 中还可以看到, 在激光器线宽为 10 kHz 时, PI 控制器不满足第 1 章所提的, 周跳间隔大于 $10\,000 \text{ s}$ 的约束条件。

为了分析满足条件的激光器线宽, 固定周跳间隔为 $10\,000 \text{ s}$, 绘制不同控制带宽下两种控制器允许的最大激光器线宽曲线如图 5 所示, 其中虚线为 LQR 控制器, 实线为 PI 控制器。

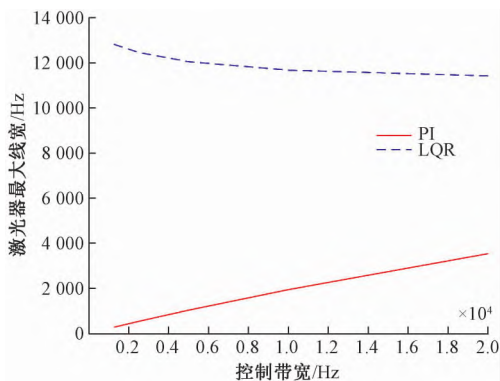


图 5 不同控制带宽下两种控制器允许的最大激光器线宽

从图 5 中可以看出, 随着控制带宽从 2 kHz 到 20 kHz 变化, PI 控制器所允许的最大激光器线宽从 300 Hz 增大到 $3\,500 \text{ Hz}$, 而 LQR 控制器所允许的最大激光器线宽稳定在 $12\,000 \text{ Hz}$ 上下。对比可知, 相较于 PI 控制器, LQR 控制器减小了科学测量对激光器的性能指标的限制, 降低了整个系统的设计难度。

5 结 论

本文建立了光学锁相系统的数学模型, 并分析了散粒噪声和激光器相位噪声对系统设计的约束。在激光器线宽和调节带宽受限的情况下, 设计了一种内模扩展的输出反馈 LQR 控制器, 提高系统对激光器相位噪声的抑制效果, 并进行了仿真实验。实验结果表明, 在达到相同的控制带宽和动态特性的情况下, LQR 控制器对激光器相位噪

声的抑制效果是 PI 控制器 3 倍。同时 LQR 控制器降低了控制系统对激光器最大线宽的约束条件, 降低了整个系统的设计难度。在实际应用中, 环境噪声和相位读出噪声也不可忽略, 如何设计控制器同时满足对各类噪声的抑制要求是未来的研究方向。

参考文献

- [1] 罗子人, 白嫻, 边星, 等. 空间激光干涉引力波探测[J]. 力学进展, 2013, 43(4):33.
- [2] 段会宗, 骆颖欣, 张静怡, 等. 星间激光干涉测量技术[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2021, 60(1):16.
- [3] GERBERDING O. Phase readout for satellite interferometry [D]. Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2014.
- [4] BARKE S, BRAUSE N, BYKOV I, et al. LISA metrology system-final report [R]. European Space Agency, 2014.
- [5] MCNAMARA P W, WARD H, HOUGH J. Laser phase-locking techniques for LISA: Experimental status[J]. American Institute of Physics, 1998, DOI: 10.1063/1.57405.
- [6] MCNAMARA P W. Weak-light phase locking for LISA [J]. Classical and Quantum Gravity, 2005, 22(10):S243-S247.
- [7] DIEKMANN C, STEIER F, SHEARD B, et al. Analog phase lock between two lasers at LISA power levels [J]. Journal of Physics: Conference Series, 2009, 154:012020.
- [8] 王俊尧. 空间相干激光通信中光学锁相环快速捕获技术研究[D]. 长春: 长春理工大学, 2020.
- [9] HOU D, NING B, LI P, et al. Modeling analysis for phase-locking of mode-locked laser[J]. IEEE Journal of Quantum Electronics, 2011, 47(7):891-898.
- [10] 董玉辉. 面向空间激光干涉引力波探测的精密指向和弱光锁相控制技术的研究[D]. 北京: 中国科学院力学研究所, 2015.
- [11] GARDNER F M. Phaselock techniques: Third edition[M]. John Wiley & Sons, Inc, Hoboken, New Jersey, 2005.
- [12] BERNARD W, ISTVAN K. Quantization noise[M]. Cambridge University Press, 2008.
- [13] KAZOVSKY L G. Balanced phase-locked loops for optical homodyne receivers: Performance analysis, design considerations, and laser linewidth requirements[J]. Journal of Lightwave Technology, 1986, 4(2):182-195.
- [14] RAMOS R T, SEEDS A J. Delay, linewidth and bandwidth limitations in optical phase-locked loop design[J]. Electronics Letters, 2002, 26(6):389-391.
- [15] 姜显宗. 外差式弱光锁相方案设计与初步实验测试[D]. 武汉: 华中科技大学, 2015.

作者简介

陈泳锟, 研究实习员, 主要从事激光干涉测量系统控制研究。

E-mail: ykchenscut@163.com

于涛(通信作者), 副研究员, 主要从事空间引力波探测激光干涉测量系统方面研究。

E-mail: yut@ciomp.ac.cn

隋延林, 助理研究员, 主要从事相位计电子学研究。

E-mail: yanlinsui@gmail.com