

空间引力波探测望远镜光学系统设计

李建聪¹, 林宏安¹, 罗佳雄¹, 伍雁雄^{1,3*}, 王 智^{2*}

(1. 佛山科学技术学院 物理与光电工程学院, 广东 佛山 528000;

2. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;

3. 季华实验室, 广东 佛山 528000)

摘要:在空间引力波探测中,望远镜是空间激光干涉测量系统的重要组成部分,其出瞳处波前误差与抖动光程(Tilt-To-Length, TTL)噪声间的耦合,是影响空间引力波探测的主要噪声源。首先,基于平顶光束与高斯光束的干涉模型,采用Fringe Zernike多项式表征望远镜出瞳处的波前误差,运用LISA Pathfinder(LPF)信号分析出瞳处波前误差与TTL噪声的耦合机理。其次,采用蒙特卡洛分析方法,研究不同数值波前误差下低阶像差占比对TTL耦合噪声的影响,确定了不同数值波前误差下,望远镜光学系统出瞳处满足TTL耦合噪声控制要求的低阶像差设计比例。最后,基于上述理论分析结果与像差控制要求,完成了空间引力波探测望远镜光学系统设计,望远镜入瞳直径为200 mm,出瞳处波前误差RMS值为0.01908 λ ,低阶像差占比不高于50%。分析结果表明,当光束抖动在 $\pm 300 \mu\text{rad}$ 以内,TTL耦合噪声不超过8.25 pm/ μrad ;通过公差分析得知,TTL耦合噪声最大值为15.50 pm/ μrad ,满足空间引力波的探测要求。

关键词:望远镜;空间引力波探测;波前误差;抖动光程噪声;光学设计

中图分类号:O439 文献标志码:A doi:10.37188/CO.2022-0018

Optical design of space gravitational wave detection telescope

LI Jian-cong¹, LIN Hong-an¹, LUO Jia-xiong¹, WU Yan-xiong^{1,3*}, WANG Zhi^{2*}

(1. School of Physics and Optoelectronic Engineering, Foshan University, Foshan 528000, China;

2. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences,

Changchun 130033, China;

3. Ji Hua Laboratory, Foshan 528000, China)

* Corresponding author, E-mail: 364477424@qq.com; wz070611@126.com

Abstract: In space gravitational wave detection, the telescope is an important part of the space laser interferometry system. The wavefront error at the exit pupil of the telescope is coupled with the Tilt-To-Length (TTL) noise, which becomes the main source of noise in space gravitational wave detection. Firstly, based on the interference model between a flat-top beam and a Gaussian beam, the Fringe Zernike polynomial is used

收稿日期:2022-01-22; 修订日期:2022-02-22

基金项目:国家自然科学基金(No. 62075214);广东省科技计划项目(No. X190311UZ190);广东省重点领域研发计划项目(No. 2020B1111040001)

Supported by National Natural Science Foundation of China (No. 62075214); Science and Technology Plan Project of Guangdong Province (No. X190311UZ190); Research and Development Projects in Key Areas of Guangdong Province (No. 2020B1111040001)

to characterize the wavefront error at the exit pupil of the telescope, and the LISA Pathfinder (LPF) signal is used to analyze the coupling mechanism of the wavefront error at the exit pupil and the TTL noise. Secondly, the Monte Carlo analysis method is used to study the influence of the proportion of low-order aberrations on the TTL coupling noise under different numerical wavefront errors, and determine the low-order aberration proportions which meets the requirements of TTL coupling noise control at the exit pupil in the design of the telescope optical system under different numerical wavefront errors. Finally, based on the above theoretical analysis results and the aberration control requirements, the optical design of the space gravitational wave detection telescope is completed. The diameter of the entrance pupil of the telescope is 200 mm, and the RMS value of the wavefront error at the exit pupil is 0.01908λ . The proportion of low-order aberrations is not higher than 50%. The analysis results show that the TTL coupling noise does not exceed $8.25 \text{ pm}/\mu\text{rad}$ when the beam jitter is within $\pm 300 \mu\text{rad}$. Through tolerance analysis, the maximum TTL coupling noise is determined to be $15.50 \text{ pm}/\mu\text{rad}$, which meets the requirements of space gravitational wave detection.

Key words: telescope; space gravitational wave detection; wavefront error; tilt-to-length noise; optical design

1 引言

引力波的发现使得人类能够探测到基于电磁波无法观测到的宇观尺度和天体现象,引力波的测量为探索宇宙的起源、形成、演化和理解引力宇宙提供了一个全新的观测手段,借助引力波探测手段帮助人类重新认识引力本质、时空结构、物质起源和宇宙起源等基本科学问题^[1]。2016 年初,地面激光干涉引力波天文台 (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory, LIGO)^[2] 直接探测到了由 13 亿光年外两黑洞旋转合并产生的引力波。由于受到低频地脉震动,引力梯度噪声以及地球曲率的限制,其探测最灵敏的频段为 $10 \text{ Hz} \sim 10^4 \text{ Hz}$,是目前小型黑洞和致密恒星合并的最佳探测器。为了能够探测到 $0.1 \text{ mHz} \sim 1 \text{ Hz}$ 频段的引力波信号^[3-5],需要构建一个测量噪声小于 $1 \text{ pm}/\sqrt{\text{Hz}}$ 的空间引力波天文台,太极计划、天琴计划和激光干涉仪空间天线 (Laser Interferometer Space Antenna, LISA) 等空间引力波探测计划,它们均使用 3 个航天器构成一个干涉臂长为百万公里级别的等边三角形空间激光干涉仪,且每个航天器带有两个望远镜^[6-9]。由于在空间环境中航天器容易受到非保守力的扰动,导致望远镜接收到的光束发生抖动,其波前误差与抖动光程 (Tilt-To-Length, TTL) 噪声耦合,成为了探测系统中仅次于散粒噪声的第二大噪声源。为了满足

空间引力波的探测要求,光束抖动在 $\pm 300 \mu\text{rad}$ 以内时 TTL 耦合噪声不能超过 $25 \text{ pm}/\mu\text{rad}$ ^[10-12],这对望远镜波前误差的控制提出了较高的要求。

为了分析望远镜波前误差与 TTL 噪声耦合的关系, SASSO 将望远镜出瞳处波前像差用 Zernike 多项式表示,仅考虑离焦、像散、彗差、三叶草以及球差,通过 LPF(LISA Path Finder) 信号解析计算指向抖动和低阶像差耦合的关系,指出望远镜的波前误差 RMS 值要小于 $\lambda/65$ 才能满足探测要求^[13]。ZHAO Y 用前 25 项 Fringe Zernike 多项式拟合望远镜出瞳处的波前,将像差的拟合级数从初级提升到了三级,分析了不同波前误差对 TTL 噪声的影响。并得出以下结论:在 LPF 信号解析计算下,波前误差 RMS 值小于 $\lambda/50$ 时才能满足探测要求^[14-15]。针对空间引力波探测,国内根据空间太极计划任务需求,对望远镜的功能及技术要求进行了分析^[16-17]。陈胜楠设计了一个波前误差 RMS 值优于 0.005λ 的离轴四反望远镜^[18]; ZHAO Y 构建了一个 P-V 值为 0.014λ 的望远镜,但由于加工装调等误差的影响,实际的波前误差 RMS 值已恶化为 0.071λ ^[15],TTL 耦合噪声超过 $25 \text{ pm}/\mu\text{rad}$ 。当前关于空间引力波探测望远镜的设计,尚未有针对望远镜波前误差对 TTL 噪声的影响确定光学像差的控制边界的研究,也没有以此为指导设计空间引力波探测望远镜光学系统。

为研究空间引力波探测望远镜出瞳处波前误

差对 TTL 噪声的耦合机理及像差控制要求, 本文基于高斯光束和平顶光束干涉原理建立 TTL 噪声的光学模型。基于 LPF 信号分析了不同光学像差对 TTL 噪声的贡献程度; 采用蒙特卡洛算法研究不同数值波前误差下, 低阶像差占比对 TTL 耦合噪声的影响, 由此确定望远镜光学系统设计时低阶像差占比与总波前误差的控制要求。在此基础上, 设计了一种望远镜波前误差满足 TTL 耦合噪声低于 25 pm/ μ rad 控制要求的空间引力波探测望远镜光学系统。

2 波前误差与 TTL 噪声耦合模型

2.1 平顶光束与高斯光束的干涉原理

如图 1 所示, 望远镜将远场波前截断为平顶光束, 与高斯光束叠加传输, 通过成像系统在四象限探测器(QPD)上进行干涉。

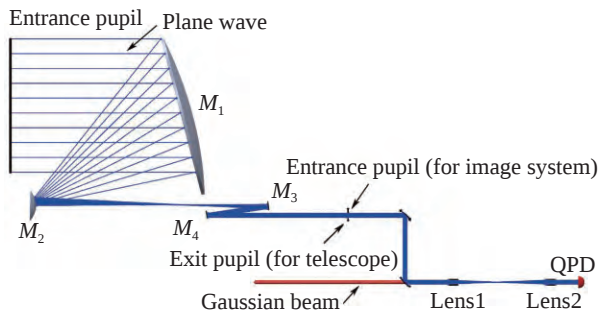


图1 空间激光干涉仪望远镜光学系统

Fig. 1 Telescope optical system of space laser interferometer

由于望远镜光学系统存在波前误差, 平顶光束和高斯光束受加工和装调等误差影响, 传输后相位已发生畸变。在目前的理论分析中^[13-14], 通常采用复振幅来计算相位信息, 并且为了简化后面的计算, 假设平顶光束 E_{flat} 和高斯光束 E_{gauss} 两个干涉光束的中心重合, 并将干涉中心设置为图 2 (彩图见期刊电子版) 所示的坐标原点 O , 则复振幅表示为:

$$O_{\text{ovi}} = \int_S E_{\text{flat}} E_{\text{gauss}}^* dr^2 = \int_S e^{-\frac{r^2}{\omega(z)^2}} e^{-ikW(r,\theta)} dr^2, \quad (1)$$

式中 (r, θ) 是探测器上面的极坐标, $W(r, \theta)$ 表示包括倾斜在内的总波前误差, $\omega(z)$ 是探测器上的光斑大小。

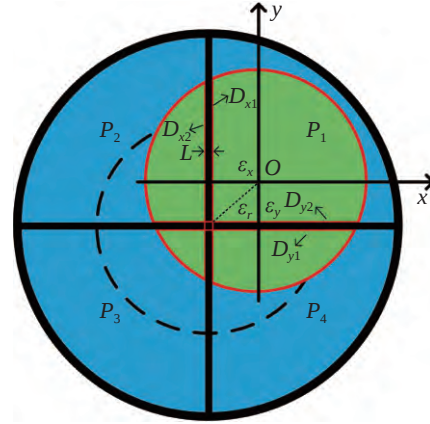


图2 干涉光束与四象限探测器的相对位置

Fig. 2 The relative position of the interference beam and the four-quadrant detector

对于 LPF 信号, 通过计算式 (1) 的幅角, 便可以得到干涉光束的相位差 ϕ_{LPF} 。由于四象限探测器存在狭缝, 会导致部分复振幅信息丢失, 故需要减去丢失部分的复振幅。四象限探测器的狭缝宽度是微米级别的, 本文将狭缝宽度和干涉圆光斑交叠部分的形状视为矩形, 通过笛卡尔坐标计算丢失部分的复振幅。 ϕ_{LPF} 的计算可表示为:

$$\phi_{\text{LPF}} = \arg[(a_0 + ia_1 - a_2 - ia_3) - (s_0 + is_1)] \approx \frac{a_1 - a_3 - s_1}{a_0 - a_2 - s_0}, \quad (2)$$

式中 a_n 为式 (1) 近似计算的结果, s_n 为丢失部分的复振幅:

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 r e^{-r^2/\omega^2} \left(\int_0^{2\pi} [kW(r, \theta)]^n d\theta \right) dr, \quad (3)$$

$$s_n = \int_{-\epsilon_x+L}^{-\epsilon_x} \int_{-D_{x2}/2}^{D_{x1}/2} e^{-(x^2+y^2)/\omega^2} [kW(x, y)]^n dx dy + \int_{-\epsilon_y+L}^{-\epsilon_y} \int_{-D_{y2}/2}^{D_{y1}/2} e^{-(x^2+y^2)/\omega^2} [kW(x, y)]^n dx dy - \int_{-\epsilon_x+L}^{-\epsilon_x} \int_{-\epsilon_y+L}^{-\epsilon_y} e^{-(x^2+y^2)/\omega^2} [kW(x, y)]^n dx dy, \quad (4)$$

其中: L 为四象限探测器沟道的狭缝宽度; 干涉圆光斑中心 O 偏离探测器中心的距离为 ϵ_r , 偏离竖直方向和水平方向的狭缝长度分别为 ϵ_x 和 ϵ_y ; D_{x1} 、 D_{x2} 和 D_{y1} 、 D_{y2} 为干涉圆斑与探测器正交的两条狭缝相交的弦长。

2.2 波前误差与 TTL 噪声的耦合

Zernike 多项式由于在圆域上具有正交性, 故其在描述图像时具有最少的信息冗余度, 并且与光学设计中的 Seidel 像差相对应, 所以在圆瞳孔

径上常作为正交基进行波前重构,其基本形式为:

$$Z_i(\rho, \theta) = \begin{cases} \sqrt{2(n+1)}R_n^m(\rho)\cos(m\theta) & i \text{ 为偶数且 } m \neq 0 \\ \sqrt{2(n+1)}R_n^m(\rho)\sin(m\theta) & i \text{ 为奇数且 } m \neq 0, \\ \sqrt{(n+1)}R_n^m & m = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{n-m} \frac{(-1)^s(n-s)!}{s! \left(\frac{n+m-s}{2}\right)! \left(\frac{n-m-s}{2}\right)!} \quad (6)$$

式中, $R_n^m(\rho)$ 为径向多项式, n 和 m 为整数, 且 $n-m \geq 0$, $\rho = r/R$ 为归一化的径向坐标。

为了精确描述光学系统的制造和调整误差, 采用 Fringe Zernike 多项式的前 25 项拟合望远波前误差。除了径向对称的离焦项及 3 个球差项外, 可以将其它相同像差的余弦项和正弦项进行合并, 获得这些像差的矢量形式, 以此用一个公式表示对应像差的大小和方向。如

图 3(彩图见期刊电子版) 所示, 为了获得倾斜像差矢量, 可以联立余弦项 (x 方向) 和正弦项 (y 方向) 的倾斜像差项, 其矢量形式为:

$$a_2 Z_2(\rho, \theta) + a_3 Z_3(\rho, \theta) = A_1^{TI} \rho \cos(\theta - \theta_{TI}) \quad (7)$$

式中, a_i ($i=2, 3$) 是组合前的像差系数, A_1^{TI} 和 θ_{TI} 分别表示合并后像差的大小和方向角。极坐标系下的完全正交 Zernike 多项式 $Z_j(\rho, \theta)$ 如表 1 所示。

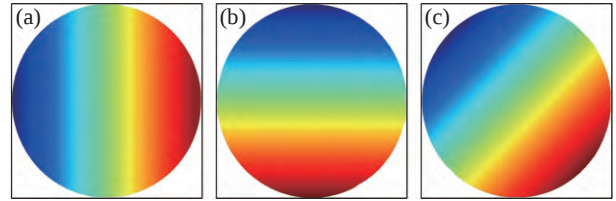


图 3 倾斜像差余弦项与正弦项合并。(a) 竖直倾斜项; (b) 水平倾斜项; (c) 合并后的倾斜项

Fig. 3 Combined cosine and sine terms of the tilt aberration. (a) Vertical tilt aberration; (b) horizontal tilt aberration; (c) combined tilt aberration

表 1 由 Fringe Zernike 多项式的前 25 项组成的 14 个 Zernike 像差

Tab. 1 The fourteen Zernike aberrations consist of the first 25 terms of Fringe Zernike polynomials

i	n, m	j	$z_j(\rho, \theta)$	Aberration Name
2,3	1,±1	1	$2\rho \cos(\theta - \theta_{TI})$	Tilt (TI)
4	2,0	2	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	Defocus (DE)
5,6	2,±2	3	$\sqrt{6}\rho^2 \cos(2\theta - \theta_{PA})$	Primary astigmatism (PA)
7,8	3,±1	4	$\sqrt{8}(3\rho^2 - 2\rho) \cos(\theta - \theta_{PC})$	Primary coma (PC)
9	4,0	5	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	Primary spherical (PS)
10,11	3,±3	6	$\sqrt{8}\rho^3 \cos(3\theta - \theta_{PTR})$	Primary trefoil (PTR)
12,13	4,±2	7	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos(2\theta - \theta_{SA})$	Secondary astigmatism (SA)
14,15	5,±1	8	$\sqrt{12}(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \cos(\theta - \theta_{SC})$	Secondary coma (SC)
16	6,0	9	$\sqrt{7}(20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1)$	Secondary spherical (SS)
17,18	4,±4	10	$\sqrt{10}\rho^4 \cos(4\theta - \theta_{PTE})$	Primary tetrafoil (PTE)
19,20	5,±3	11	$\sqrt{12}(5\rho^5 - 4\rho^3) \cos(3\theta - \theta_{STR})$	Secondary trefoil (STR)
21,22	6,±2	12	$\sqrt{14}(15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2) \cos(2\theta - \theta_{TA})$	Tertiary astigmatism (TA)
23,24	7,±1	13	$4(35\rho^7 - 60\rho^5 + 30\rho^3 - 3\rho) \cos(\theta - \theta_{TC})$	Tertiary coma (TC)
25	8,0	14	$3(70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1)$	Tertiary spherical (TS)

用 Fringe Zernike 多项式拟合的波前误差 $W(\rho, \theta)$ 以及 RMS 值 σ_w 表示为:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^{14} A_j^{\text{aber}} Z_j(\rho, \theta) \quad (8)$$

$$\sigma_w = \sqrt{\sum_j (A_j^{\text{aber}})^2} \quad (9)$$

本文旨在分析光束抖动角 α 和望远镜波前误差之间的耦合, 因此在计算过程中忽略了与 α 无关的项和高于二次的项, 通过式 (2) 解析计算得

到纵向路径长度信号 $LPS_{LPF}(\phi_{LPF}/k)$ 为:

$$LPS_{LPF} = B_1 \times \alpha + B_2 \times \alpha^2, \quad (10)$$

$$B_1 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{M}_1 \times \mathbf{v}_2^T, \quad (11)$$

$$B_2 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{M}_2^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{v}_1 \Rightarrow \{A_4^{PC}, A_8^{SC}, A_{13}^{TC}, A_6^{PTR}, A_{11}^{STR}\}, \quad (13)$$

$$\mathbf{v}_2 \Rightarrow \{A_2^{DE}, A_5^{PS}, A_9^{SS}, A_{14}^{TS}, A_3^{PA}, A_7^{SA}, A_{12}^{TA}, A_{10}^{PTE}\}, \quad (14)$$

$\mathbf{v}_1$ 为 3 个彗差项和 2 个三叶草项的像差向量的集合, $\mathbf{v}_2$ 为 4 个球差项(包括离焦)、3 个像散项和初级四叶草项的像差向量的集合; 系数矩阵 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 是归一化半径 $\omega_r = \omega/R$, θ_{TI} 和 θ_{Aber} 之间加减组合的余弦函数。

LPS 对指向抖动的灵敏度 δ_{LPS}^{LPS} , 即 TTL 耦合噪声, 可通过公式 (10) 对 α 求导数计算得出:

$$\delta_{LPS}^{LPS} = B_1 + 2B_2 \times \alpha. \quad (15)$$

通过式 (15) 可以分析望远镜波前误差中不同像差与 TTL 噪声的耦合, 并以此获得不同像差对 TTL 噪声的影响大小。

3 望远镜波前误差控制要求

3.1 光学像差与 TTL 噪声对应关系分析

为确定望远镜出瞳处总波前误差以及不同像差的控制要求, 本文通过前面解析计算得到的波前误差与 TTL 噪声耦合关系式 (15), 分析光学像差对 TTL 噪声的贡献。为了便于分析, 本文设置归一化半径 $\omega_r = 1$, θ_{TI} 和其它所有像差的方位角 θ_{Aber} 设置为零, 四象限探测器沟道狭缝的宽度为 $10 \mu\text{m}$, 通过加入 Zernike 多项式的常数项获得特定值的系数矩阵。为便于比较, 将 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 矩阵中的元素分别除以它们的最大值, 如图 4(彩图见期刊电子版) 所示。

为了分析矩阵元素的归一化值和 TTL 耦合噪声 δ_{LPS}^{LPS} 的关系, 本文选取 $\mathbf{M}_2$ 矩阵中的像差, 分析单一像差对 TTL 噪声的耦合影响, 其 RMS 值在 $[\lambda/100, \lambda/10]$ 内, 获得对应波前误差下 TTL 耦合噪声的最大值, 结果如图 5 所示。可见, 在满足 $\delta_{LPS}^{LPS} \leq 25 \text{ pm}/\mu\text{rad}$ 的要求时, 则需要 $A_3^{PA} \leq 0.014\lambda$, $A_2^{DE} \leq 0.016\lambda$, $A_5^{PS} \leq 0.063\lambda$, $A_9^{SA} \leq 0.068\lambda$, 而 A_9^{SS} 、

A_4^{PC}	0.991	0.709	0.212	0.028	0.179	0.912	0.214	0
A_8^{SC}	0.271	1.000	0.756	0.221	0.075	0.331	0.833	0
A_{13}^{TC}	0.034	0.269	0.966	0.784	0.011	0.109	0.408	0
A_6^{PTR}	0	0	0	0	0.995	0.108	0.048	0.991
A_{11}^{STR}	0	0	0	0	0.176	0.971	0.235	0.071
$\mathbf{M}_1$								
A_2^{DE}	0.883	0.228	0.029	0.002	1.000	0.209	0.025	0
A_5^{PS}								
A_9^{SS}								
A_{14}^{TS}								
A_3^{PA}								
A_7^{SA}								
A_{12}^{TA}								
A_{10}^{PTE}								
$\mathbf{M}_2$								

图 4 归一化的 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 系数矩阵

Fig. 4 Normalized coefficients of the $\mathbf{M}_1$ and $\mathbf{M}_2$ matrices

A_{14}^{TS} 和 A_{12}^{TA} 在上述区间内均能满足要求。通过分析可知, δ_{LPS}^{LPS} 与 $\mathbf{M}_2$ 矩阵的归一化值成正相关, 如 A_3^{PA} 和 A_2^{DE} 元素的比值为 0.883, 在满足 $\delta_{LPS}^{LPS} = 25 \text{ pm}/\mu\text{rad}$ 时所要求的幅值比值的倒数为 0.883, 两者结果一致, 这说明矩阵中元素的归一化值大小可反映不同像差对 TTL 噪声的贡献程度。

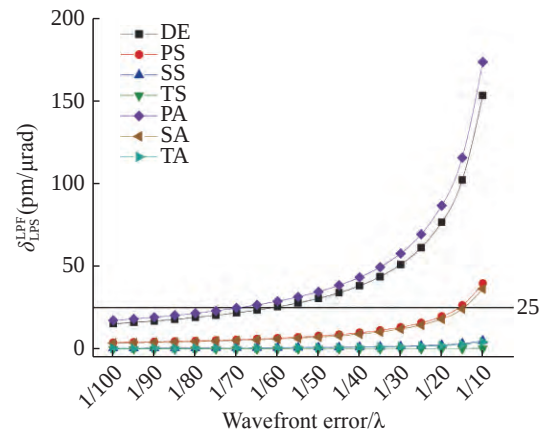


图 5 $\mathbf{M}_2$ 矩阵中不同像差对 TTL 噪声的影响

Fig. 5 The influence of different aberrations on TTL noise in the $\mathbf{M}_2$ matrix

研究发现, 不同级数的像差对 TTL 噪声的影响有所差异, 本文将 Fringe Zernike 多项式前 25 项(除去倾斜项 TI)表示的像差分为两类, 一类为 DE、PA、PC、PS 和 PTR 5 个初级像差的低阶像差, 其余的则为高阶像差。在 $\mathbf{M}_1$ 矩阵中, 归一化值超过 0.9 的总共有 7 个元素, 其中 5 个元素(图 4 中框选的区域)与低阶像差相关, 并且随着像差级数的增加, 对应元素的归一化值逐渐降低, 这一情况在 $\mathbf{M}_2$ 矩阵中表现得更为明显。由此可知, 相较于高阶像差, 低阶像差对 TTL 耦合噪声的贡献更大。

3.2 低阶像差占比对 TTL 噪声的耦合影响

当低阶像差在望远镜出瞳处波前误差中的比例不同时,对 TTL 噪声贡献也有所不同。为分析低阶像差项在波前误差中的占比对 TTL 噪声的影响,本文在总的波前误差 RMS 值分别为 $\lambda/60$ 、 $\lambda/50$ 、 $\lambda/40$ 、 $\lambda/30$ 和 $\lambda/20$ 时,分析低阶像差占比分别为 20%、30%、40%、50%、60%、70% 和 100% 时对 TTL 噪声的影响差异。利用蒙特卡洛算法分别随机生成 1 万个波前误差样本,并分别代入式 (15) 进行计算。在计算过程中,不考虑 A_1^T 和 θ_{Aber} ,用 α 代替 θ_{Tl} ,在 α 为 $\pm 300\text{ }\mu\text{rad}$ 的条件下获得 $\delta_{\text{LPS}}^{\text{LPF}}$ 的最大值,以考虑最坏情况是否满足探测要求。分析结果如图 6(彩图见期刊电子版) 所示,为了更好地对比不同条件下的统计结果,本文将不同系统总的波前误差、不同低阶像差占比时的 TTL 耦合噪声平均值及不大于 $25\text{ pm}/\mu\text{rad}$ 的样本比例,总结如表 2 所示。从表 2 可以看出,随着

低阶像差在总波前误差中的占比降低,波前误差与 TTL 噪声耦合的平均值逐步减小。在 $\sigma_w = \lambda/20$,低阶像差占比为 20% 时,TTL 耦合噪声小于 $25\text{ pm}/\mu\text{rad}$ 的概率为 88.1%;低阶像差占比为 100% 时,满足探测要求的概率仅为 5.36%。另外,随着望远镜波前误差降低,对低阶像差占比的要求逐渐放宽,从 $\sigma_w = \lambda/30$,低阶像差占比 20%,变为 $\sigma_w = \lambda/60$,低阶像差占比 60%。

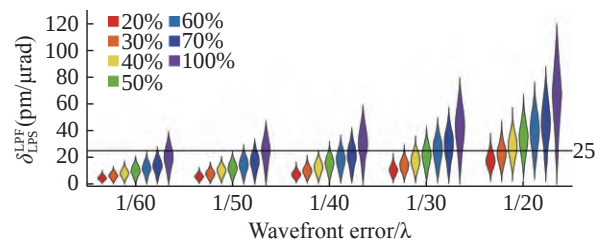


图 6 低阶像差在不同占比下对 TTL 噪声的影响
Fig. 6 The effect of low-order aberration on TTL noise under different proportions

表 2 不同占比低阶像差下 TTL 耦合噪声平均值及耦合噪声不超过 25 pm/μrad 的概率统计
Tab.2 Average value of TTL coupling noise and probability statistics for TTL coupling noise not exceeding 25 pm/μrad under different proportions of low-order aberrations

占比	$\lambda/60$		$\lambda/50$		$\lambda/40$		$\lambda/30$		$\lambda/20$	
	平均值	比例	平均值	比例	平均值	比例	平均值	比例	平均值	比例
20%	4.75	100.00%	5.85	100.00%	7.60	100.00%	10.76	100.00%	18.19	88.10%
30%	6.42	100.00%	7.86	100.00%	10.11	100.00%	14.15	98.92%	23.05	60.86%
40%	8.21	100.00%	10.07	100.00%	12.70	99.96%	17.62	88.50%	28.40	36.12%
50%	10.07	100.00%	11.98	100.00%	15.41	96.50%	21.23	68.92%	34.24	20.76%
60%	11.88	100.00%	14.51	98.54%	18.15	84.20%	25.16	48.26%	39.38	14.84%
70%	13.84	99.32%	16.78	90.80%	21.16	67.80%	29.03	34.62%	45.28	10.78%
100%	19.85	74.20%	24.32	50.98%	30.50	29.94%	41.52	14.30%	64.15	5.36%

4 设计结果与分析

空间引力波探测望远镜光学系统除了需要满足衍射极限的成像质量外,更为重要的是系统波前误差与 TTL 噪声耦合要满足探测要求。表 3 给出了典型空间引力波探测望远镜光学系统的主要设计指标,其中 TTL 耦合噪声不大于 $25\text{ pm}/\mu\text{rad}$ 。

本文选择离轴四反无焦光学系统初始结构进行设计与优化。根据系统波前误差对 TTL 噪声的影响机理与仿真分析结果,总的系统波前误差越小,TTL 耦合噪声越小;同时,随着低阶像差占

比的降低,总的系统波前误差要求可以降低。为确保 TTL 耦合噪声不超过 $25\text{ pm}/\mu\text{rad}$,一方面考

表 3 空间望远系统指标
Tab.3 Indicators of space telescope system

系统参数	技术指标
入瞳直径/mm	200
工作波长/nm	1 064
科学视场/ μrad	± 8
系统放大倍率	40
系统波像差	$\leq 0.03\lambda@1064\text{ nm}$
TTL耦合噪声	$\leq 25\text{ pm}/\mu\text{rad}$

考虑总的系统波前误差不宜过小, 以减小后续加工制造的难度; 另一方面考虑到低阶像差的占比也不宜过低, 增加高阶像差会导致加工制造的公差灵敏度变高。经过平衡与设计, 最终控制望远镜总的波前误差不超过 $\lambda/50$ 以及低阶像差占比 50% 作为望远镜像差的控制要求, 对望远镜光学系统设计进行结构调整, 平衡与优化总的波前误差以及低阶像差占比。

研究发现, 对次镜引入偶次非球面项有利于调控低阶像差的占比, 因此设计中将次镜设置为高阶偶次非球面。为避免更高阶非球面项引起加工制造难度大的问题, 控制非球面项最高不超过 12 次项。设计完成的光学系统结构如图 7 所示。望远镜各反射镜设计参数如表 4 所示, 主镜为双曲面, 次镜的偶次非球面高阶项系数如表 5 所示, 三镜和四镜为球面。图 8(a)(彩图见期刊电子版) 为望远镜出瞳处的波前图, 可知, 其总的波前误差 RMS 值为 0.01908λ , 低阶像差占比为 50%, 由 Fringe Zernike 多项式拟合的幅值大小 (Mag) 和方向角 (Ori) 如表 6 所示。图 8(b)

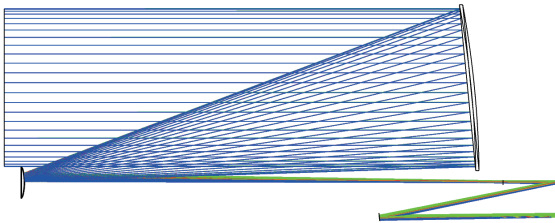


图 7 优化后的望远镜光学系统结构

Fig. 7 Optimized structure of the telescope optical system

(彩图见期刊电子版) 为波前误差与 TTL 噪声耦合的结果, 在 $\pm 300\ \mu\text{rad}$ 以内, 耦合系数的最大值为 $8.25\ \text{pm}/\mu\text{rad}$, 远低于指标要求的 $25\ \text{pm}/\mu\text{rad}$, 满足空间引力波的探测需求。

表 4 优化后望远镜光学系统的设计参数

Tab. 4 Optimized design parameters of the telescope optical system

望远镜	曲率半径	空气间隔	圆锥系数
主镜	-1212.526	-573.883	-1.005 37
次镜	-68.658	676.229	-1.365 38
三镜	-760.425	-227.503	-
四镜	736.659	223.794	-

表 5 次镜偶次非球面的高阶项系数

Tab. 5 High-order term coefficients of even-order aspheric surfaces of the secondary mirror

项数	4 th	6 th	8 th	10 th	12 th
系数	2.9010×10^{-8}	-1.2858×10^{-10}	7.6057×10^{-12}	5.8855×10^{-14}	-4.5785×10^{-16}

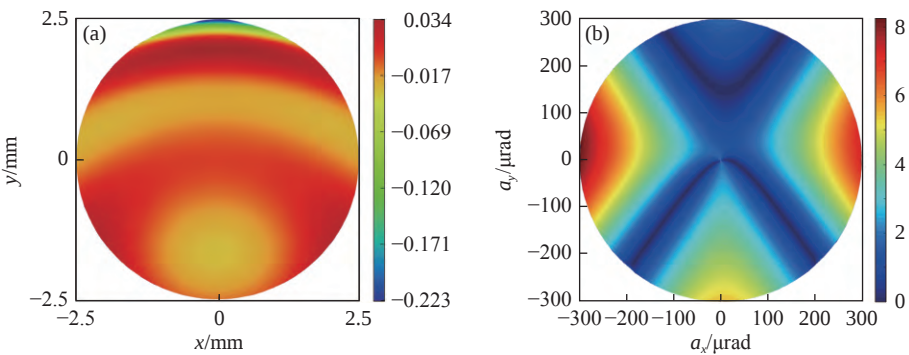


图 8 (a) 优化后望远镜出瞳处波前; (b) TTL 耦合噪声计算结果

Fig. 8 (a) Wavefront at the exit pupil of the telescope after optimization; (b) calculation results of TTL coupled noise

在本文设计中, 通过控制望远镜光学系统总的波前误差以及调控低阶像差的占比, 实现了 TTL 耦合噪声控制要求。进一步地, 考虑到加工、装配等制造环节对波前误差以及 TTL 噪声耦合的变化能否满足要求, 以 TTL 耦合噪声作为评价因子, 对望远镜进行公差分析。望远镜光学

系统的公差主要包括加工公差和装调公差, 以主镜作为装调基准, 具体的公差分配表如表 7 所示。为了检验公差分析结果是否满足探测要求, 通过提取 200 个公差分析文件的波前误差和 Fringe Zernike 多项式幅值, 通过式 (15) 计算得到 TTL 耦合噪声, 结果如图 9 所示。波前误差

表 6 Zernike 多项式拟合望远镜出瞳处波前的幅值和方向

Tab. 6 Amplitude and orientation of the wavefront at the exit pupil of the telescope based on Zernike polynomials							
Mag/Ori	A_2^{DE}	A_3^{PA}/θ_{PA}	A_4^{PC}/θ_{PC}	A_5^{PS}	A_6^{PTR}/θ_{PTR}	A_7^{SA}/θ_{SA}	A_8^{SC}/θ_{SC}
Value/(mm·rad ⁻¹)	1.30	3.74/3.14	3.93/4.71	1.15	4.52/4.71	2.08/3.14	8.36/1.57
Mag/Ori	A_9^{SS}	$A_{10}^{PTE}/\theta_{PTE}$	$A_{11}^{STR}/\theta_{STR}$	A_{12}^{TA}/θ_{TA}	A_{13}^{TC}/θ_{TC}	A_{14}^{TS}	—
Value/(mm·rad ⁻¹)	5.85	9.04/1.57	9.69/4.71	7.64/3.14	4.03/1.57	0.93	—

表 7 望远镜公差分配

Tab. 7 Tolerance allocation of the telescope					
类型	公差项	主镜	次镜	三镜	四镜
加工公差	曲率半径(mm)	0.1	0.02	0.1	0.1
	二次曲面系数	0.000 5	0.001	—	—
	面型精度(λ)	1/100	1/100	1/200	1/200
装调公差	X向位移(μm)	—	15	20	20
	Y向位移(μm)	—	15	20	20
	Z向位移(μm)	—	15	20	20
	绕X轴倾斜($^\circ$)	—	20	20	20
	绕Y轴倾斜($^\circ$)	—	20	20	20
	绕Z轴倾斜($^\circ$)	—	40	60	60

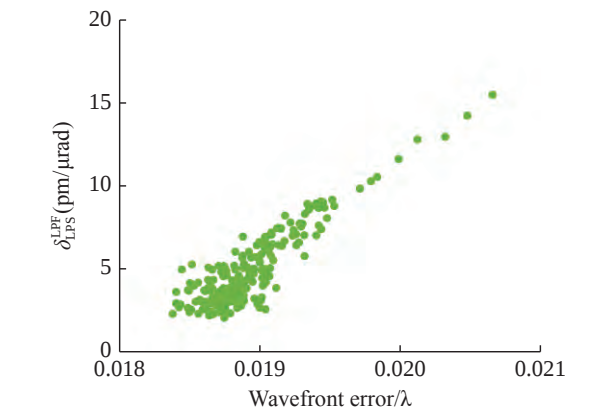


图 9 蒙特卡洛公差分析下耦合系数统计结果
Fig. 9 Statistical results of coupling coefficient with Monte Carlo tolerance analysis

在 0.0184λ~0.0207λ 范围内, TTL 耦合噪声的平均值为 5.04 pm/μrad, 最大值为 15.50 pm/μrad。在典型公差条件下, 望远镜能够满足 TTL 耦

参考文献:

[1] 罗子人, 白珊, 边星, 等. 空间激光干涉引力波探测[J]. 力学进展, 2013, 43(4): 415-447.
LUO Z R, BAI SH, BIAN X, et al.. Gravitational wave detection by space laser interferometry[J]. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(4): 415-447. (in Chinese)

[2] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, et al.. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(6): 061102.

[3] 王智, 马军, 李静秋. 空间引力波探测计划-LISA系统设计要点[J]. 中国光学, 2015, 8(6): 980-987.
WANG ZH, MA J, LI J Q. Space-based gravitational wave detection mission: design highlights of LISA system[J].

合噪声不超过 25 pm/μrad 的要求, 具备可实现性。

5 结 论

目前, 空间引力波探测望远镜光学系统的设计处于起步与完善阶段, 在设计上有其特殊性, 不仅需要满足衍射极限的成像质量, 重点要实现光学像差与 TTL 噪声耦合满足引力波的探测要求。本文建模分析了光学像差与 TTL 耦合噪声的影响机理, 仿真分析了单种像差对 TTL 耦合噪声的影响程度。研究分析了低阶像差在望远镜波前误差中的占比对 TTL 噪声的影响。在此基础上, 提出通过控制系统总的波前误差以及低阶像差占比的设计方法, 满足 TTL 耦合噪声的像差控制要求。

通过设计典型指标下的空间引力波探测望远镜光学系统, 验证了设计方法的有效性。实现望远镜总的波前误差 RMS 值为 0.01908λ, 低阶像差占比为 50%, 在±300 μrad 以内 TTL 耦合噪声的最大值为 8.25 pm/μrad。公差分析结果表明, 系统总的波前误差 RMS 值优于 0.0207λ, TTL 耦合噪声平均值为 5.04 pm/μrad, 最大值为 15.50 pm/μrad, 满足空间引力波探测对 TTL 耦合噪声的要求, 具备工程实现性。研究成果为空间引力波探测望远镜光学系统的设计制造提供了一种有效的方法参考与借鉴。

- Chinese Optics*, 2015, 8(6): 980-987. (in Chinese)
- [4] 王璐钰, 李玉琼, 蔡榕. 空间激光干涉仪激光抖动噪声抑制研究[J]. 中国光学, 2021, 14(6): 1426-1434.
WANG L Y, LI Y Q, CAI R. Noise suppression of laser jitter in space laser interferometer[J]. *Chinese Optics*, 2021, 14(6): 1426-1434. (in Chinese)
- [5] 王登峰, 姚鑫, 焦仲科, 等. 面向天基引力波探测的时间延迟干涉技术[J]. 中国光学, 2021, 14(2): 275-288.
WANG D F, YAO X, JIAO ZH K, *et al.*. Time-delay interferometry for space-based gravitational wave detection[J]. *Chinese Optics*, 2021, 14(2): 275-288. (in Chinese)
- [6] DANZMANN K, The LISA Study Team. LISA: laser interferometer space antenna for gravitational wave measurements[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 1996, 13(11A): A247-A250.
- [7] LUO Z R, GUO Z K, JIN G, *et al.*. A brief analysis to Taiji: science and technology[J]. *Results in Physics*, 2020, 16: 102918.
- [8] LUO J, CHEN L SH, DUAN H Z, *et al.*. TianQin: a space-borne gravitational wave detector[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2016, 33(3): 035010.
- [9] DONG Y H, LIU H SH, LUO Z R, *et al.*. A comprehensive simulation of weak-light phase-locking for space-borne gravitational wave antenna[J]. *Science China Technological Sciences*, 2016, 59(5): 730-737.
- [10] CHWALLA M, DANZMANN K, BARRANCO G F, *et al.*. Design and construction of an optical test bed for LISA imaging systems and tilt-to-length coupling[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2016, 33(24): 245015.
- [11] SUTTON A, MCKENZIE K, WARE B, *et al.*. Laser ranging and communications for LISA[J]. *Optics Express*, 2010, 18(20): 20759-20773.
- [12] SCHUSTER S, WANNER G, TRÖBS M, *et al.*. Vanishing tilt-to-length coupling for a singular case in two-beam laser interferometers with Gaussian beams[J]. *Applied Optics*, 2015, 54(5): 1010-1014.
- [13] SASSO C P, MANA G, MOTTINI S. Coupling of wavefront errors and pointing jitter in the LISA interferometer: misalignment of the interfering wavefronts[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2018, 35(24): 245002.
- [14] ZHAO Y, SHEN J, FANG CH, *et al.*. Tilt-to-length noise coupled by wavefront errors in the interfering beams for the space measurement of gravitational waves[J]. *Optics Express*, 2020, 28(17): 25545-25561.
- [15] ZHAO Y, SHEN J, FANG CH, *et al.*. Far-field optical path noise coupled with the pointing jitter in the space measurement of gravitational waves[J]. *Applied Optics*, 2021, 60(2): 438-444.
- [16] 王智, 沙巍, 陈哲, 等. 空间引力波探测望远镜初步设计与分析[J]. 中国光学, 2018, 11(1): 131-151.
WANG ZH, SHA W, CHEN ZH, *et al.*. Preliminary design and analysis of telescope for space gravitational wave detection[J]. *Chinese Optics*, 2018, 11(1): 131-151. (in Chinese)
- [17] 李钰鹏, 王智, 沙巍, 等. 空间引力波望远镜主镜组件的结构设计[J]. 红外与激光工程, 2018, 47(8): 0818004.
LI Y P, WANG ZH, SHA W, *et al.*. Structural design of primary mirror subassembly for spatial gravitational wave telescope[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2018, 47(8): 0818004. (in Chinese)
- [18] 陈胜楠, 姜会林, 王春艳, 等. 大倍率离轴无焦四反光学系统设计[J]. 中国光学, 2020, 13(1): 179-188.
CHEN SH N, JIANG H L, WANG CH Y, *et al.*. Design of off-axis four-mirror afocal optical system with high magnification[J]. *Chinese Optics*, 2020, 13(1): 179-188. (in Chinese)

作者简介:



李建聪(1997—), 男, 广东湛江人, 硕士研究生, 2020年于佛山科学技术学院获得学士学位, 现于佛山科学技术学院攻读硕士学位, 主要从事光学系统设计方面的研究。E-mail: 751934038@qq.com



伍雁雄(1982—), 男, 湖南邵阳人, 博士, 教授, 硕士生导师, 2015年于中国科学院大学获得理学博士学位, 主要研究方向为航空航天光学系统设计和光学仪器研制。E-mail: 364477424@qq.com



王智(1978—), 男, 山东寿光人, 博士, 研究员, 博士生导师, 2006年于中国科学院长春光学精密机械与物理研究所获得工学博士学位, 主要研究方向为空间引力波探测高精度精密测量技术。E-mail: wz070611@126.com